Aula 5 - Produto Vetorial

Antes de iniciar o conceito de produto vetorial, precisamos recordar como se calculam os determinantes.

Mas o que é um Determinante?

Determinante é uma função matricial que associa a cada **matriz quadrada** um escalar (número real), isto é, essa função transforma uma matriz quadrada em um número real. Um dos significados desta função é permitir saber se uma matriz tem ou não inversa, pois as que não têm são precisamente aquelas cujo determinante é igual a 0.

Como calcular um Determinante?

Um determinante de ordem 2 é definido por:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (-4)(2) = 15+8 = 23$$

Um determinante de ordem 3, pode ser definido por:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} a - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} b + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} c$$

A definição acima é conhecida como Teorema de Laplace “aplicado à primeira linha”

As propriedades do cálculo de determinantes serão utilizadas no cálculo do produto vetorial, assim:

Propriedades dos determinantes:

Propriedades

1. O determinante também é uma função n-linear e alternada nas colunas da matriz;
2. O determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta: $\det(A)=\det(A^T)$;
3. Se uma fila (linha ou coluna) da matriz é composta de zeros, então o determinante desta matriz será zero;
4. Se escrevermos cada elemento de uma linha ou coluna de A como soma de duas parcelas então $\det(A)$ é a soma de dois determinantes de ordem n cada um considerando como elemento daquela linha ou coluna uma das parcelas, e repetindo as demais linhas ou colunas;
5. Se uma matriz é triangular (superior ou inferior) o seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal;
6. Multiplicando uma fila (linha ou coluna) de uma matriz A por um escalar $\lambda \in K$, então o determinante da nova matriz é igual ao determinante de A multiplicado por λ;
7. Se permutarmos duas linhas ou colunas de A então o determinante da nova matriz é $-\det(A)$;
8. Se A tem duas linhas (ou colunas) iguais, então $\det(A) = 0$;
9. Se somarmos a uma linha (ou coluna) de A um múltiplo de outra linha (ou coluna), o determinante da nova matriz é igual ao de A;
10. Se A e B são matriz quadradas da mesma ordem, então $\det(AB) = \det(A).\det(B)$;
11. Se A é invertível, então $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, de onde resulta que se A é invertível então $\det(A) \neq 0$;
12. Se A é ortogonal, então $\det(A) = \pm 1$.

Definição do Produto Vetorial

Chama-se *produto vetorial* de dois vetores

$\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$ e $\vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$, tomados nesta ordem, e se representa por $\vec{u} \times \vec{v}$, ao vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

Usando a notação de determinante de ordem 2, podemos escrever o produto vetorial como a seguir:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Utilizando o teorema de Lapalce, podemos melhorar e facilitar a memorização da definição de produto vetorial, como segue:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Obs: o símbolo à direita, acima, é uma representação de um determinante, para facilitar a memorização do cálculo do produto escalar, pois o determinante só pode ser calculado se todos os elementos contidos no determinante forem do mesmo tipo. Na representação acima, a primeira linha contém vetores e as demais, números reais.

Exemplo

Calcular $\vec{u} \times \vec{v}$ para $\vec{u} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$.

Solução

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (4 - 0)\vec{i} - (5 - 3)\vec{j} + (0 - 4)\vec{k}$$

$$= 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$$

Observe a resolução abaixo:

Se trocarmos a ordem dos vetores, vem:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = (0 - 4)\vec{i} - (3 - 5)\vec{j} + (4 - 0)\vec{k}$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

OBS: Perceba que $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ são opostos, isto é $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$. Isto significa que não se pode trocar a ordem dos fatores do produto vetorial

Propriedades do produto vetorial

I) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$, qualquer que seja $\vec{u}$.

De fato, de acordo com a definição:

$$\vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

Tendo em vista uma propriedade dos determinantes (... *duas linhas iguais* ...):

$\vec{u} \times \vec{u} = 0$

II) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$.

De fato, de acordo com a definição:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad \vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}$$

Tendo em vista uma propriedade dos determinantes (... *trocando-se entre si duas linhas* ...):

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

III) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}.$

De fato, se

$$\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k},$$

$$\vec{v} + \vec{w} = (x_2 + x_3)\vec{i} + (y_2 + y_3)\vec{j} + (z_2 + z_3)\vec{k}$$

logo:

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 & z_2 + z_3 \end{vmatrix}$$

IV) $(\boldsymbol{m\vec{u}}) \times \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{m}(\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}})$

De fato: $\boldsymbol{m\vec{u}} = \boldsymbol{mx_1\vec{i}} + \boldsymbol{mx_2\vec{j}} + \boldsymbol{mx_3\vec{k}}$

Logo:

$$(\boldsymbol{m\vec{u}}) \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ mx_1 & my_1 & mz_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

E de acordo com as propriedades de determinantes, temos:

$$(\boldsymbol{m\vec{u}}) \times \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{m}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Portanto: $(\boldsymbol{m\vec{u}}) \times \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{m}(\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}})$

V) $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ se, e somente se, um dos vetores é nulo ou se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

De fato:

a) Se $\vec{u}$ é nulo, as suas componentes são (0, 0, 0):

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

De acordo com as propriedades de determinantes: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

b) Se nem $\vec{u}$ nem $\vec{v}$ são nulos, mas se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares:

$$\vec{u} = m\vec{v}$$

ou:

$$\vec{u} = mx_2\vec{i} + my_2\vec{j} + mz_2\vec{k},$$

logo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ mx_2 & my_2 & mz_2 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

De acordo com as propriedades de determinantes: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

VI) $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Como visto, se o produto escalar entre dois vetores for igual a zero, então o ângulo formado pelos vetores é igual a 90º

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0,$$

$\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal simultaneamente aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Como:

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = x_1 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Então, de acordo com as propriedades de determinantes e do produto escalar:

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Veja abaixo um exemplo da verificação da propriedade:

Exemplo

O produto vetorial dos vetores $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ é o vetor:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -6\vec{i} - 11\vec{j} - 10\vec{k}$$

O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal, simultaneamente, aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. De fato:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = -6(3) - 11(2) - 10(-4) = -18 - 22 + 40 = 0$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = -6(2) - 11(-2) - 10(1) = -12 + 22 - 10 = 0$$

VII) $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$

VIII) Se $\vec{u} \neq \vec{0}$, se $\vec{v} \neq \vec{0}$ e se θ é o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| sen\theta$$

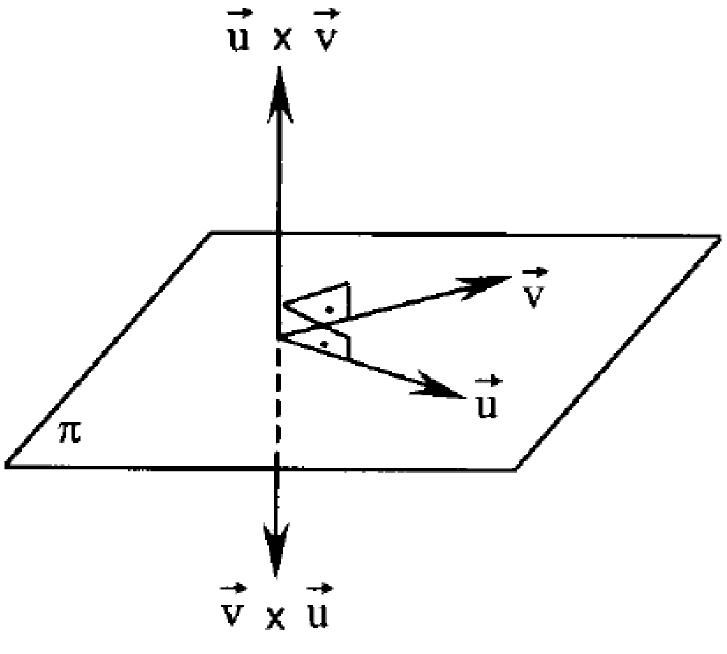
Características do produto vetorial $(\vec{u} \times \vec{v})$

Considere os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ **:**

i) Com relação à direção de $(\vec{u} \times \vec{v})$**:**

O vetor $(\vec{u} \times \vec{v})$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ **e a** $\vec{v}$ **;**

Veja a representação gráfica, abaixo:



Exemplo

Dados os vetores $\vec{u} = (3, 1, 2)$ e $\vec{v} = (-2, 2, 5)$, tem-se

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (1, -19, 8)$$

e

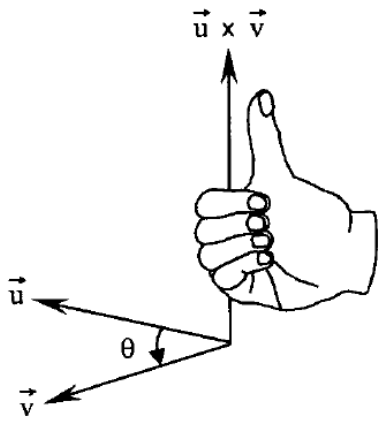
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (1,\ -19,\ 8) \cdot (3,\ 1,\ 2) = 3 - 19 + 16 = 0$$

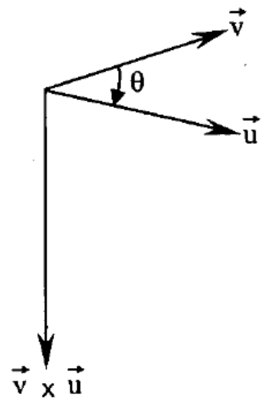
$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = (1,\ -19,\ 8) \cdot (-2,\ 2, 5) = -2 - 38 + 40 = 0$$

ii) O sentido de $(\vec{u} \times \vec{v})$:

Sendo θ o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e supondo que $\vec{u}$ sofra uma rotação de ângulo θ , até coincidir com o vetor $\vec{v}$, o sentido de $(\vec{u} \times \vec{v})$ é positivo. Se tivermos a situação oposta, então o sentido de $(\vec{u} \times \vec{v})$ é negativo.

Veja abaixo, um dispositivo prático, utilizando a regra da mão direita:





iii) Comprimento de $(\vec{u} \times \vec{v})$:

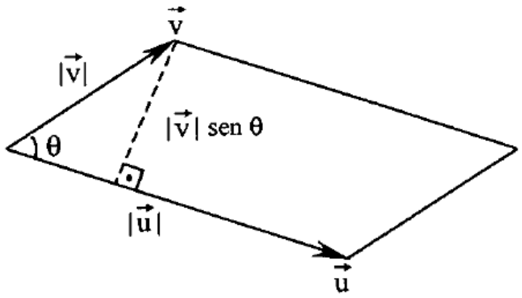
Sendo θ é o ângulo formado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, com $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, então:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \operatorname{sen} \theta$$

Interpretação Geométrica do Comprimento (módulo, norma) do Produto Vetorial

Observando que no paralelogramo determinado pelos vetores não-nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ Figura abaixo, a medida da base é $|\vec{u}|$ e da altura é $|\vec{v}|$ sen θ, a área A deste paralelogramo é

$$A = (\text{base})\,(\text{altura}) = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\ \text{sen}\ \theta$$



Desta maneira, a área de um paralelogramo qualquer determinado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, como na figura acima, é determinada calculando o comprimento do vetor $(\vec{u} \times \vec{v})$**, isto é:**

$$A = ||\vec{u} \times \vec{v}||$$

Exercícios Resolvidos

1) Determinar o vetor $\vec{x}$, tal que $\vec{x}$ seja ortogonal ao eixo dos y e $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$, sendo $\vec{u} = (1, 1, -1)$ e $\vec{v} = (2, -1, 1)$.

Como $\vec{x} \perp 0y$, ele é da forma $\vec{x} = (x, 0, z)$.

Então, $\vec{u} = \vec{x} \times \vec{v}$ equivale a

$$(1, 1, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & 0 & z \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Assim: $(1, 1, -1) = (z, -x + 2z, -x)$.

Pela condição de igualdade de dois vetores resulta o sistema

$$\begin{cases} z = 1 \\ -x + 2z = 1 \\ -x = -1 \end{cases}$$

Portanto, $\vec{x} = (1, 0, 1)$.

2) Sejam os vetores $\vec{u} = (1, -1, -4)$ e $\vec{v} = (3, 2, -2)$. Determinar um vetor que seja

a) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e unitário;

c) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e tenha módulo 4;

d) ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e tenha cota igual a 7.

a) Como $(\vec{u} \times \vec{v})$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, basta fazer o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (10, -10, 5)$$

Como $\alpha(10, -10, 5)$ é paralelo ao vetor $(10, -10, 5)$, então temos infinitas respostas. Basta escolher uma delas.

b) Basta tomar o versor de $(\vec{u} \times \vec{v})$ do item a):

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{(10, -10, 5)}{15} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

c) Basta multiplicar o versor de $(\vec{u} \times \vec{v})$ por 4:

$$4\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

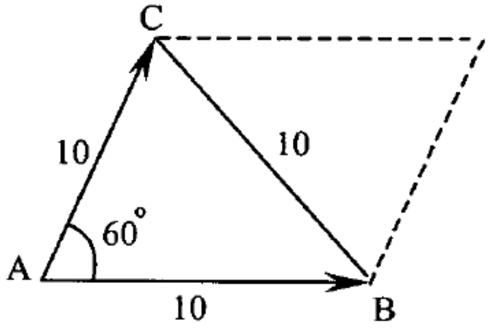
d) Como a cota é a coordenada em relação ao eixo z, temos que dentre as infinitas soluções $\alpha(10, -10, 5)$, escolhemos aquela culo z = 7. Assim:

$5\alpha = 7$, ou seja, $\alpha = \dfrac{7}{5}$.

$\dfrac{7}{5}(10, -10, 5) = (14, -14, 7)$

3) Seja um triângulo eqüilátero ABC de lado 10. Calcular $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$.

Conforme figura abaixo, temos:



Sabemos que : $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|sen\theta$ **, então**

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = (10)(10)(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 50\sqrt{3}$$

OBS: Este resultado representa o valor da área do paralelogramo definido por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Para determinar a área do triângulo ABC basta dividir o resultado acima por 2:

$$A_T = \frac{50\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}\ uA$$

4) Dados os vetores $\vec{u} = (1, -1, 1)$ e $\vec{v} = (2, -3, 4)$, calcular

a) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) a altura do paralelogramo relativa à base definida pelo vetor $\vec{u}$.

a) Sabemos que a área do paralelogramo é determinada por: $A = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$ **, então:**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1, -2, -1)$$

$A = |(-1, -2, -1)| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$ u.a (unidades de área).

b) Sabemos que Área = base x altura. Como temos a área, determinada no item a) , então basta determinar o comprimento da base do paralelogramo:

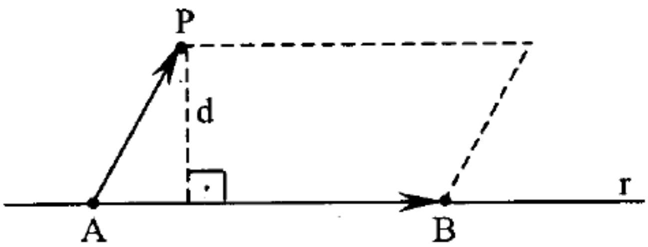
$$\boldsymbol{base = \|\vec{u}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}}$$

Assim, a altura fica:

$$\boldsymbol{h = \frac{área}{base} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} = \sqrt{2}\, uC}$$

5) Determinar a distância do ponto P(5, 1, 2) à reta r que passa por A (3, 1, 3) e B (4, -1, 1).

Veja a representação gráfica do problema:



De acordo com o problema anterior, a distancia d é igual a altura h do paralelogramo. Assim:

$$d = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AB}|}$$

Como $\overrightarrow{AB} = (1, -2, -2)$, $\overrightarrow{AP} = (2, 0, -1)$ e

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2, -3, 4)$$

$$d = \frac{|(2, -3, 4)|}{|(1, -2, -2)|} = \frac{\sqrt{4+9+16}}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\sqrt{29}}{3} \text{u.c.}$$

6) Dados os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (1, -1, a)$, calcular o valor de a para que a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ seja igual a $\sqrt{62}$.

A área A do paralelogramo é dada por $A = |\vec{u} \times \vec{v}|$

Deseja-se que $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{62}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a - 1, -2a - 1, -3)$$

$$|(a - 1, -2a - 1, -3)| = \sqrt{62}$$

$$\sqrt{(a - 1)^2 + (-2a - 1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{62}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e ordenando os termos, vem

$$a^2 - 2a + 1 + 4a^2 + 4a + 1 + 9 = 62$$

$$5a^2 + 2a - 51 = 0$$

$$a = 3 \quad \text{ou} \quad a = -\frac{17}{5}$$

Faça este você:

7) Dados os pontos A(2, 1, 1), B(3, -1, 0) e C(4, 2, -2), determinar
   a) a área do triângulo ABC;
   b) a altura do triângulo relativa ao vértice C.