

Lista de exercícios de Derivadas parciais

Prof Luis Carlos – Calculo Diferencial e integral 2 - Fabricação

1) Usando a definição de derivada parcial, isto é,

$f_x(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ e $f_y(x) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$, calcule a derivada das funções abaixo:

1. $z = 5xy - x^2$.
2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 10$.
3. $z = 2x + 5y - 3$.
4. $z = \sqrt{xy}$.
5. $f(x, y) = x^2y + 3y^2$.

2) Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem das funções abaixo:

8. $f(x, y) = e^{x^2y}$.
9. $f(x, y) = x \cos(y - x)$.
10. $f(x, y) = xy^2 + xy + x^2y$.
11. $f(x, y) = y^2 \ln(x^2 + y^2)$.
12. $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.
13. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
14. $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
15. $g(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.
16. $z = (x + y)e^{x+2y}$.

17. $z = \frac{x^2 y}{x^2 + 2y^2}$.

18. $z = e^{x^2 + y^2 - 4}$.

19. $z = 2xy + \sin^2 xy$.

20. $z = \ln(x + y) - 5x$.

21. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

22. $z = \sqrt{xy} - xy$.

23. $f(w, t) = w^2 t - \frac{1}{t}$.

24. $f(u, v) = uv - \ln(uv)$.

25. $z = x^2 y^2 - xy$.

26. $z = \sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)$.

27. $z = e^{x^2}(x^2 + y^2)$.

34. Encontrar a inclinação da reta tangente à curva resultante da intersecção de $z = f(x, y)$ com o plano $x = x_0$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$.

a) $z = 5x - 2y; P(3, -1, 17)$

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}; P(1, -1, 1)$

35. Seja $z = 3x^2 - 2y^2 - 5x + 2y + 3$. Encontrar a inclinação da reta tangente à curva resultante da intersecção de $z = f(x, y)$ com $y = 2$ no ponto $(1, 2, -3)$.

36. Dada a superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, determinar a reta tangente às curvas de intersecção da superfície com:

a) o plano $x = 2$

b) o plano $y = \sqrt{5}$

no ponto $P(2, \sqrt{5}, 3)$.

40. Encontrar as derivadas de 2ª ordem das seguintes funções:

a) $z = x^2 - 3y^3 + 4x^2y^2$

b) $z = x^2y^2 - xy$

c) $z = \ln xy$

d) $z = e^{xy}$.

41. Encontrar as derivadas parciais de 3ª ordem da função

$$z = x + y + x^3 - x^2 - y^2.$$

Nos exercícios 42 a 47, determinar as derivadas parciais indicadas

42. $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4y^2}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

43. $z = x \cos xy, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

44. $z = \ln(x^2 + y^2), \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

45. $w = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$.

46. $w = x^2 + y^2 + 4z^2 + 1, \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial z}, \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x \partial y}$.

47. $z = \sqrt{2xy + y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

Respostas:

1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 5y - 2x, \frac{\partial z}{\partial y} = 5x$ 2. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ 3. 2, 5 4. $\frac{y}{2\sqrt{xy}}, \frac{x}{2\sqrt{xy}}$
 5. $2xy, x^2 + 6y$ 7. 0, 0 8. $2xye^{xy}, x^2e^{xy}$
 9. $x\text{sen}(y - x) + \cos(y - x), -x\text{sen}(y - x)$ 10. $y^2 + y + 2xy, 2xy + x + x^2$
 11. $\frac{2xy^2}{x^2 + y^2}, \frac{2y^3}{x^2 + y^2} + 2y \ln(x^2 + y^2)$ 12. $\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ 13. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
 14. $\frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$ 15. $\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}$ 16. $(x + y + 1)e^{x+2y}, (2x + 2y + 1)e^{x+2y}$
 17. $\frac{4xy^3}{(x^2 + 2y^2)^2}, \frac{x^4 - 2x^2y^2}{(x^2 + 2y^2)^2}$ 18. $2xe^{x^2+y^2-4}, 2ye^{x^2+y^2-4}$ 19. $2y + 2y \text{sen } xy \cos xy, 2x + 2x \text{sen } xy \cos xy$
 20. $\frac{1}{x + y} - 5, \frac{1}{x + y}$ 21. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$
 22. $\frac{y}{2\sqrt{xy}} - y, \frac{x}{2\sqrt{xy}} - x$ 23. $2wt, w^2 + \frac{1}{t^2}$ 24. $v - \frac{1}{u}, u - \frac{1}{v}$
 25. $2xy^2 - y, 2yx^2 - x$ 26. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 2x, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 2y$ 27. $2xe^{x^2}[1 + x^2 + y^2], 2ye^{x^2}$

34. a) -2 b) -1 35. 1

36. a) $\begin{cases} z = \frac{\sqrt{5}}{3}y + \frac{4}{3} \\ x = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} z = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \\ y = \sqrt{5} \end{cases}$

40. a) $2 + 8y^2, 16xy, -18y + 8x^2, 16xy$ b) $2y^2, 4xy - 1, 2x^2, 4xy - 1$
 c) $\frac{-1}{x^2}, 0, \frac{-1}{y^2}, 0$ d) $y^2e^{xy}, e^{xy}[1 + xy], x^2e^{xy}, e^{xy}[1 + xy]$

41. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6$, as demais derivadas terceiras são nulas

42. $-(x^2 + 4y^2)^{-\frac{3}{2}} + 3x^2(x^2 + 4y^2)^{-\frac{5}{2}}, 12xy(x^2 + 4y^2)^{-\frac{5}{2}}$

43. $-2y\text{sen } xy - xy^2 \cos xy, -2x \text{sen } xy - x^2y \cos xy, -2x \text{sen } xy - x^2y \cos xy$

44. $\frac{-4x^3 + 12xy^2}{(x^2 + y^2)^3}$

45. $-(1 - x^2 - y^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} - z^2(1 - x^2 - y^2 - z^2)^{-\frac{3}{2}}, -xy(1 - x^2 - y^2 - z^2)^{-\frac{3}{2}}$

46. 0, 0 47. $(2xy + y^2)^{-\frac{1}{2}} - y(x + y)(2xy + y^2)^{-\frac{3}{2}}, 3y^3(2xy + y^2)^{-\frac{5}{2}}$