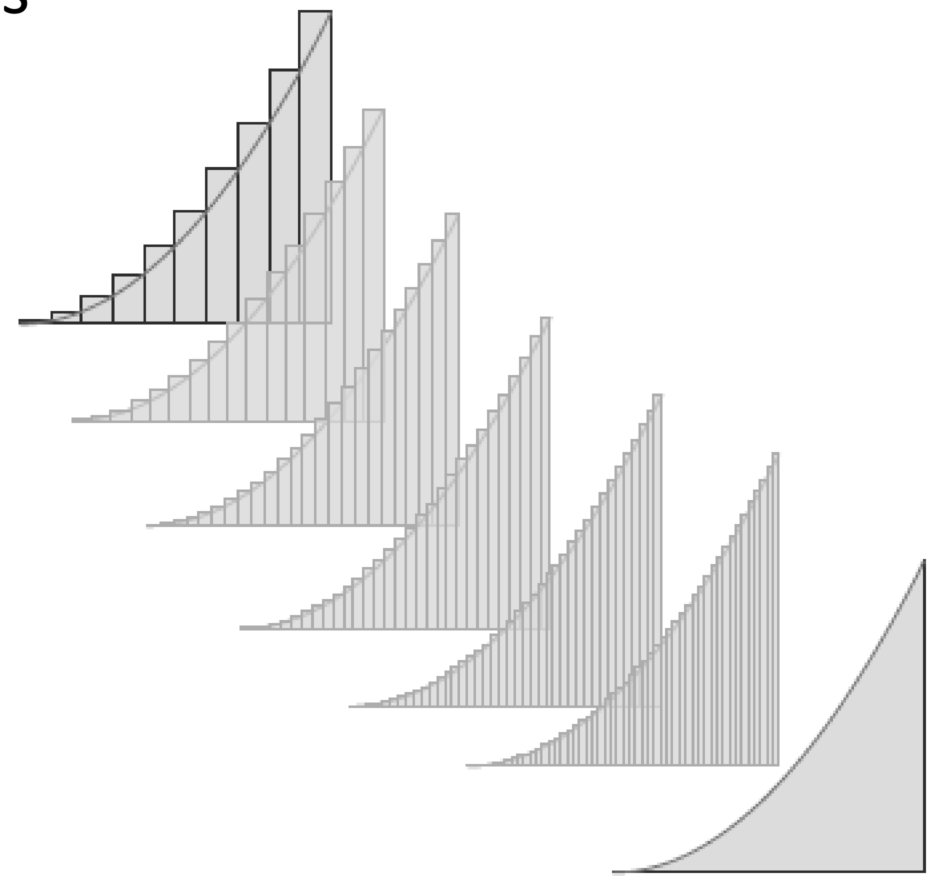
Integral definida

Prof Luis Carlos

Fabricação – 2º sem

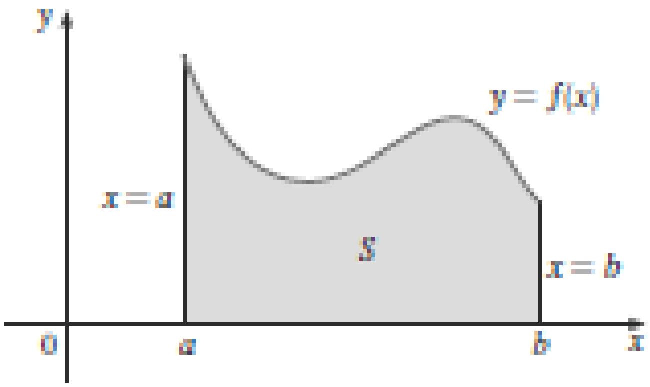
Cálculo de Áreas



Para calcular esta área, aproximamos a região por retângulos e fazemos o número de retângulos se tornar muito grande. A área exata é o limite das somas das áreas destes retângulos.

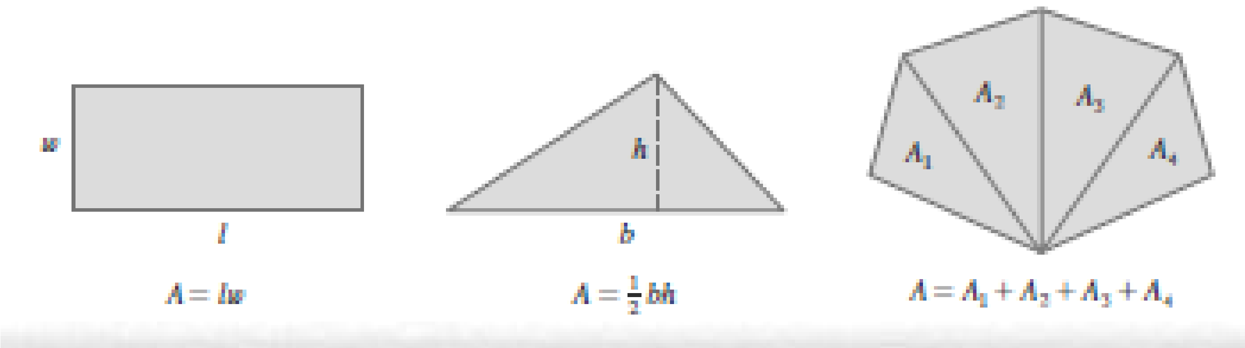
Problema:

Calcular a área de uma região S, que está abaixo da curva y = f(x), com x variando de a até b, e acima do eixo X



Conforme figura acima, a área S está limitada pelo gráfico da função continua f, com f(x) > = 0, pelas retas verticais x=a e x=b e pelo eixo X.

Cálculo de área de figuras planas

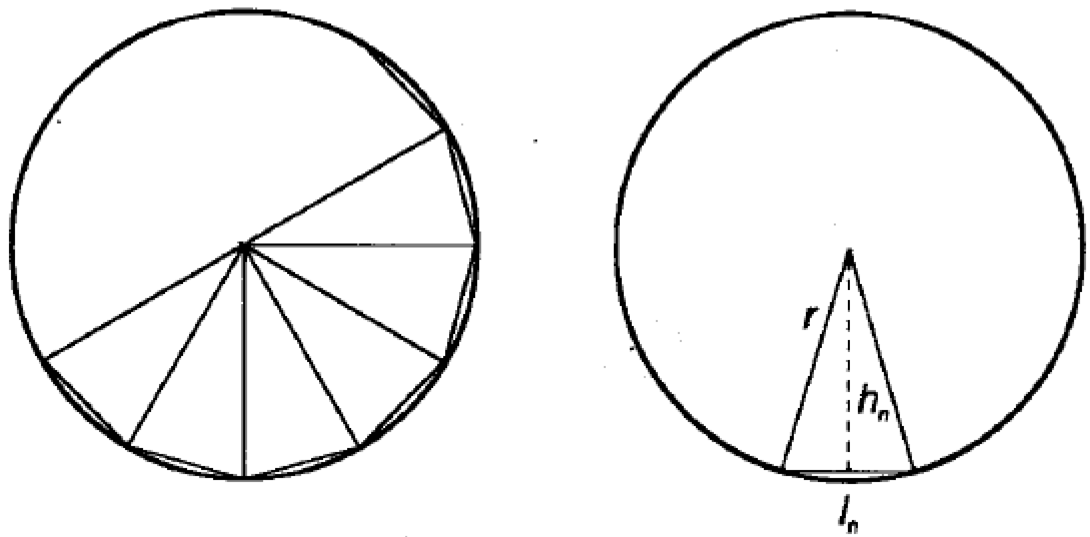


Como calcular a área de figuras planas não-regulares?

Como exemplo, vamos calcular a área do círculo:

Para tal, vamos utilizar um polígono de n lados, P_n, inscrito no círculo . O polígono P_n pode ser dividido em n triângulos, de modo que sua área A_n seja:

$$A_n = n \cdot A_{T_n}$$



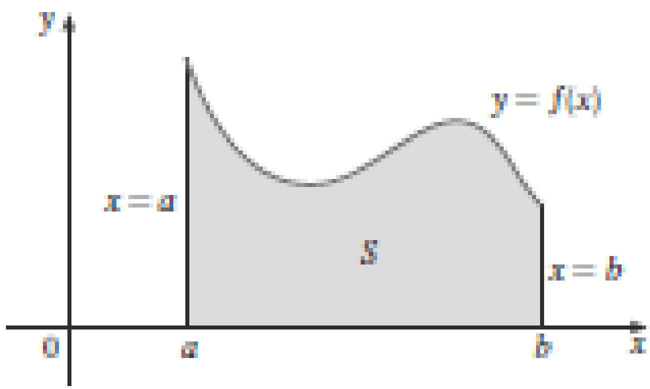
Como $A_{T_n} = \dfrac{l_n \cdot h_n}{2}$ e o perímetro é dado por $p_n = nl_n$, vem

$$A_n = n \cdot \frac{l_n \cdot h_n}{2} = \frac{p_n\, h_n}{2}$$

Fazendo n crescer muito, isto é, $n \to +\infty$, o polígono P_n torna-se uma aproximação do círculo, o perímetro do polígono se aproxima do comprimento do círculo, isto é, $2\pi r$ e a altura do triângulo n, se aproxima do raio r. Assim:

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$ (que é a área do círculo)

Considere agora o problema anterior do cálculo da área da figura abaixo:



Lembrando que a área S está delimitada pelo gráfico da função continua f, com f(x) > = 0, pelas retas verticais x=a e x=b e pelo eixo X.

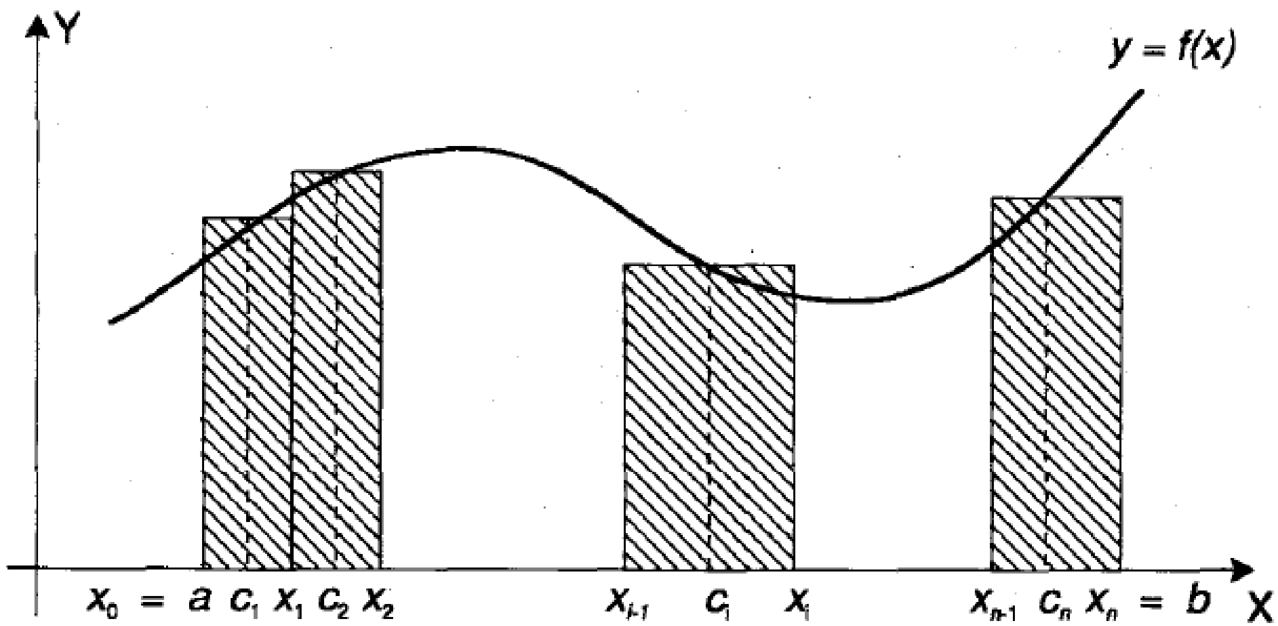
Para o cálculo da área, fazemos uma partição do intervalo [a,b] , ou seja , dividimos o intervalo em n sub-intervalos, escolhendo seus pontos, como abaixo:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

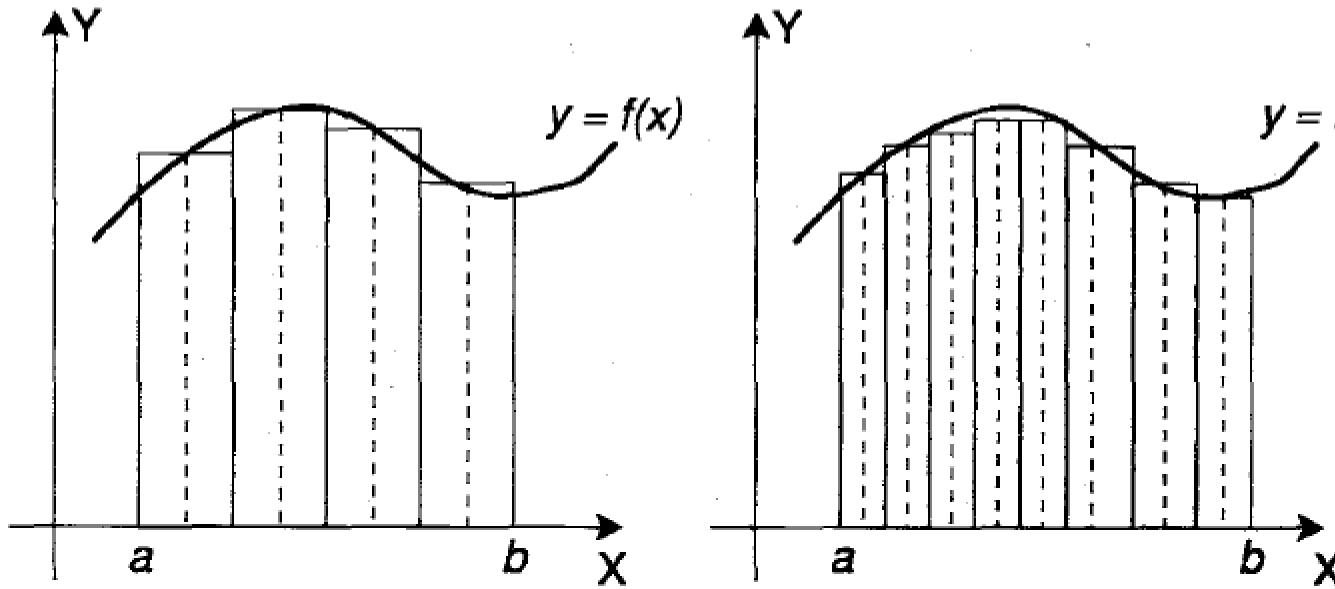
Seja $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$

Em cada um desses intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, escolhemos um ponto qualquer c_i

Para cada i, $i = 1, \ldots, n$, construímos um retângulo de base Δx_i e altura $f(c_i)$



Veja na figura abaixo, em exemplo dos retângulos para os casos n=4 e n=8 :



A soma das áreas dos retângulos, que chamaremos de S_n , é dada por:

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

Chamada de soma de Riemann da função f(x).

Definição. Seja $y = f(x)$ uma função contínua, não negativa em $[a, b]$. A área sob a curva $y = f(x)$, de a até b, é definida por

$$A = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i,$$

onde para cada $i = 1, \ldots, n$, c_i é um ponto arbitrário do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

Prova-se que o limite da definição acima existe e é um número não negativo.

Diante do exposto, estamos prontos para a definição de integral definida ...

Integral definida

Definição: Seja f uma função definida em um intervalo [a,b] e seja P uma partição qualquer deste intervalo. A integral definida da função f , de a até b, cuja notação é:

$$\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad \text{é dada por}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i\,,$$

Se $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, dizemos que f é *integrável* em $[a, b]$.

Se f é integrável em $[a, b]$, então $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(s)\,ds$

Definição

(a) Se $a > b$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx\,,$$ se a integral à direita existir.

(b) Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

Teorema. Se f é contínua sobre $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

Proposição: Se a < c < b e a função f é integrável em [a, c] e em [c, d] , então a função f é integrável em [a, b] e, além disso:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Proposição: Se a função f é integrável e se f (x) >= 0 para todo x em [a, b], então:

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq 0$$

Proposição: Se as funções f e g são integráveis em [a, b] e se f (x) >= g (x) para todo x em [a, b], então:

$$\int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$$

Proposição: Se a função f é contínua em [a, b], então:

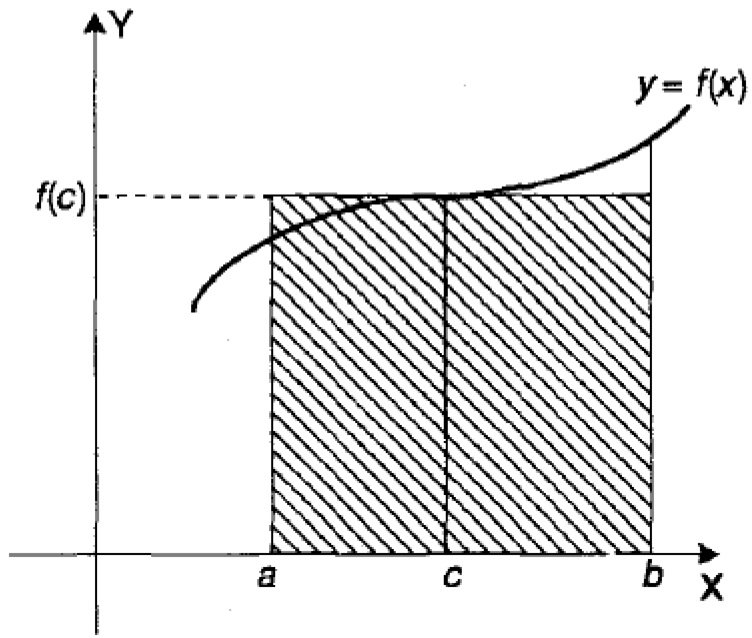
$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Teorema do valor médio para integrais

Proposição: Se a função f é contínua em [a, b], então existe um ponto c entre a e b, tal que :

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b - a)\ f(c)$$

Veja a figura abaixo:

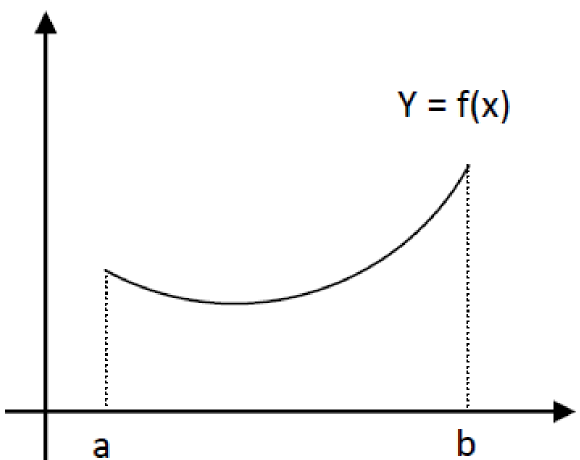


Teorema Fundamental do Cálculo

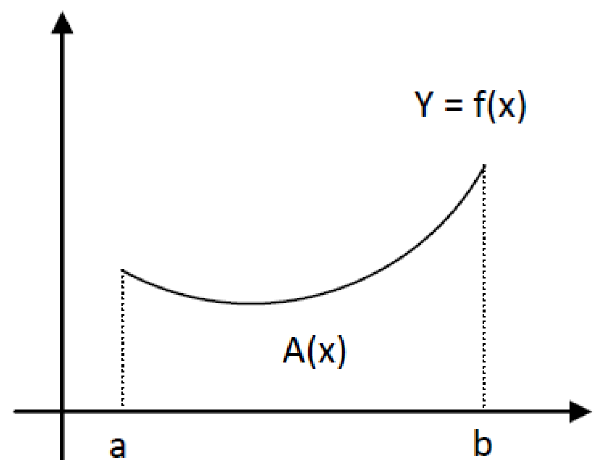
- ✓ Permite relacionar as operações de derivada e integral

- ✓ Conhecendo uma primitiva de uma função contínua $f:[\,a,b\,] \to R$ podemos Calcular sua integral definida $\int_a^b f(t)dt$

Para resolver este problema, no lugar de calcular a área ficada no intervalo [a,b] (fig a), vamos calcular a área variável , produzida quando a extremidade direita é considerada móvel (fig b), de modo que a área seja uma função de x, conforme figura abaixo:



(a)



(b)

Teorema Fundamental do Cálculo

Recordando ... Se f(t) >= 0 para qquer t em [a,b], a integral $\int_a^b f(t)dt$ é igual à área da figura plana limitada pelo gráfico de f, entre a e b

Se chamarmos de G(x) a função área citada anteriormente, observe que G(a) = 0 e que B(b) é igual à área da figura (a) acima.

Seja G(x), definida como: $G(x) = \int_a^x f(t)dt$

Proposição: Seja f uma função continua em um intervalo[a, b]. Então a função G: [a, b] $\rightarrow$ R , definida por

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

tem derivada em todos os pontos x $\in$ [a, b], dada por G´(x) = f(x) , ou seja,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

Teorema Fundamental do Cálculo

Assim: $\dfrac{dG}{dx} = f(x)$

quer dizer que a taxa de variação da área da função G, em relação a x é igual ao comprimento do lado direito da região, conforme abaixo:

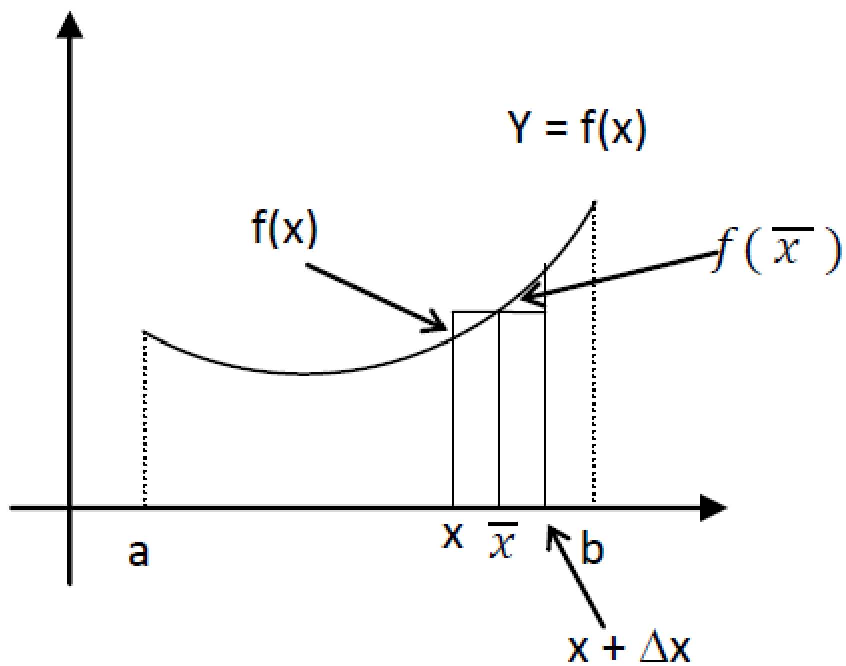
$$\frac{dG}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x}$$

Mas, G(x) é a área entre **a** e **x** e G(x + Δx) é a área entre **a** e **x + Δx** . Desta maneira, G(x + Δx) - G(x) é a área entre **x** e **x + Δx** .

Segundo o Teorema do valor médio para integrais, é fácil ver que essa área é igual à área de um retângulo de base **Δx** e altura $f(\overline{x})$, onde $\overline{x}$ é um ponto convenientemente escolhido entre **x** e **x + Δx** .

Teorema Fundamental do Cálculo

Examine a gráfico a seguir, para intuir o que se acabou de citar.



Teorema Fundamental do Cálculo

Como f é uma função contínua, podemos concluir que:

$$\frac{dG}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x+\Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\overline{x})\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\overline{x}) = f(x)$$

Para entender melhor o limite anterior, verifique que dizer que $\Delta x \to 0$ é equivalente a dizer que $x + \Delta x \to x$. Como $\overline{x}$ é tomado entre x e $x + \Delta x$, temos que $\overline{x} \to x$; o fato de f ser continua nos conduz a $f(\overline{x}) \to f(x)$

Por outro lado, sabemos que G(x) é uma antiderivada de f(x), lembra?
Se F(x) é qualquer antiderivada de f(x), então G(x) = F(x) + c , para qualquer constante c.

Fazendo c = a na equação acima, obtemos G(a) = F(a) + c ; Como G(a) = 0 , resulta que c = - F(a) e portanto : G(x) = F(x) - F(a)

Teorema Fundamental do Cálculo

Como: $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ então: $G(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a)$

De acordo com o exposto acima, se f é contínua em um intervalo [a,b] e se F(x) é qualquer antiderivada de f(x), ou dito de outra maneira:

Como: $\int f(x)dx = F(x)$ então: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a)$

Teorema: Se f uma função continua em um intervalo[a, b] e se F é uma primitiva de f neste intervalo, então :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

A diferença F(b) – F(a) usualmente é representada por: $F(t)\Big|_a^b$

Também escrevemos, $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Teorema Fundamental do Cálculo

Observação: Deve-se ter clareza que para o cálculo da integral definida de f(x), qualquer antiderivada de f servirá. Basta lembrar que se F(x) é uma antiderivada, então qualquer outra antiderivada é obtida adicionando-se uma constante c, conveniente, para formar F(x) + c , e assim:

$$F(x) + c \Big|_{b}^{a} = [\, F(b) + c] - [F(a) + c] = F(b) - F(a)$$

Exemplos. Calcular as integrais definidas:

(*i*) $\int_1^3 x \; dx$.

Sabemos que $F(x) = \frac{1}{2} x^2$ é uma primitiva de $f(x) = x$. Portanto,

$$\int_1^3 x \; dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos\ t\ dt$.

A função $F(t) = \text{sen}\ t$ é uma primitiva de $f(t) = \cos\ t$. Logo,

$$\int_0^{\pi/2} \cos\ t\ dt = \text{sen}\ t \Big|_0^{\pi/2} = \text{sen}\ \frac{\pi}{2} - \text{sen}\ 0 = 1\ .$$

(iii) $\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 1)\, dx$

$$\int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 1)\, dx = \int_0^1 x^3\ dx - 4 \int_0^1 x^2\ dx + \int_0^1 dx$$

$$= \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 - 4 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 = (\frac{1}{4} - 0) - (\frac{4}{3} - 0) + (1 - 0)$$

$$= -1/12$$

$$(iv)\quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1}$$

$$I = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

$$u = x^2 + 1 \qquad x\,dx = \frac{du}{2}$$

Utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 2$$

Exercícios:

a) $\int_{-1}^{2} x(1 + x^3)\, dx$

b) $\int_{-3}^{0} (x^2 - 4x + 7)\, dx$

c) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^6}$

d) $\int_{4}^{9} 2t\sqrt{t}\, dt$

e) $\int_{0}^{1} \frac{dy}{\sqrt{3y + 1}}$

f) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen} x \cos x\, dx$