Integrais Múltiplas

Integrais duplas sobre retângulos

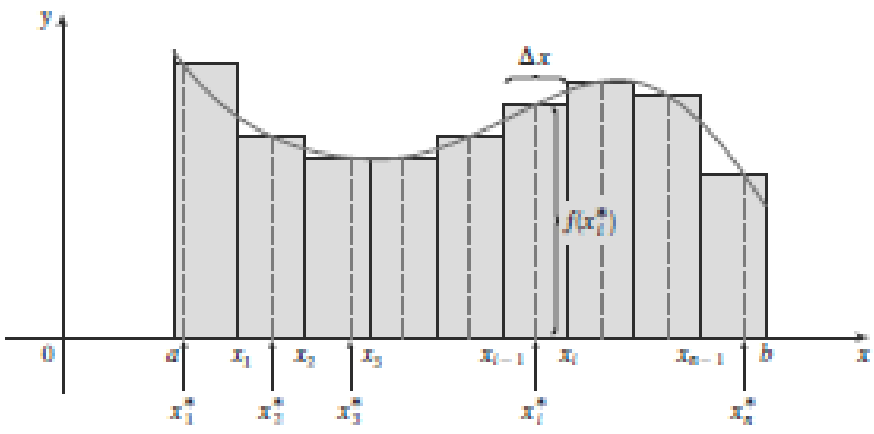
Vamos estender a noção de integral definida para funções de duas, ou mais, variáveis. Da mesma maneira que a integral definida para uma variável, nos fornece a área sob uma curva, as integrais de funções de duas variáveis determinam volumes sob “superfícies“. Além disso, também podemos calcular áreas usando a integral dupla.

Vamos primeiro recordar os fatos que dizem respeito à integral de funções de uma variável. Assim, se f(x) está definida em um intervalo [a,b], começamos dividindo [a,b] em n subintervalos [x_{i-1}, x_i] de comprimento (b-a)/n e escolher pontos amostrais , x^*_i , nesses subintervalos.

Desta forma, formamos a soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

conforme figura abaixo:



Se tomarmos o limite da soma acima com $n \to \infty$, vamos obter a definição de integral definida da função f em [a,b]:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

No caso especial onde $f(x) \geq 0$ a soma de Riemann pode ser interpretada como a soma das áreas dos retângulos aproximantes da figura acima e $\int_a^b f(x)dx$ representa a área sob a curva $y = f(x)$ de a até b.

Integrais duplas e cálculo de volume

De maneira semelhante à ideia de derivada de função de uma variável, considere uma função de duas variáveis definida em um retângulo fechado:

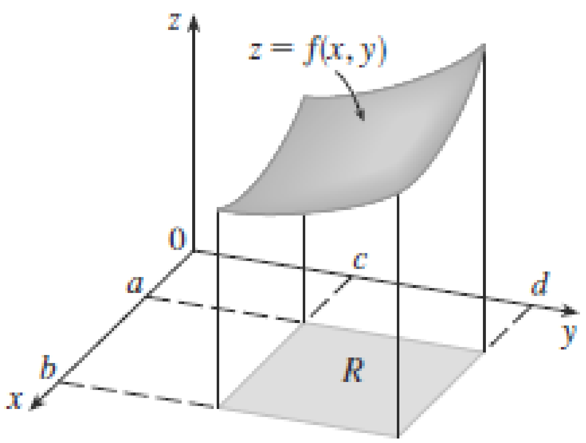
$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \in R^2 |\ a \leq x \leq b\,; c \leq y \leq d\}$$

E suponhamos inicialmente que $f(x,y) \geq 0$. O gráfico desta função é uma superfície de equação $z = f(x,y)$.

Seja V o solido que está entre a região R e a superfície do gráfico de S:

$$\{(x,y,z) \in R^3 |\ 0 \leq z \leq f(x,y); (x,y) \in R^2\}$$

conforme figura abaixo:



Nosso objetivo é calcular o volume citado acima.

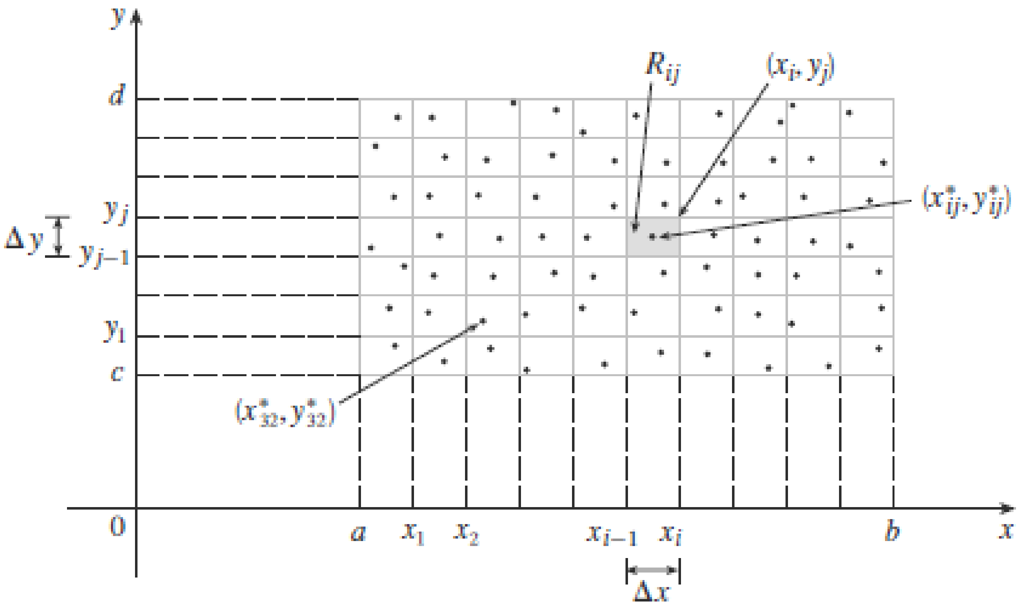
Primeiro precisamos dividir o retângulo R em sub-retângulos, da mesma forma que fizemos com o intervalo [a,b] para calcular a área sob o gráfico de uma função de uma variável.

Fazemos isso, dividindo o intervalo [a,b] em *m* subintervalos [x_{i-1}, x_i] de comprimento (b - a)/*m* e dividindo o intervalo [c,d] em *n* subintervalos [y_{i-1}, y_i] de comprimento (d - c)/*n* .

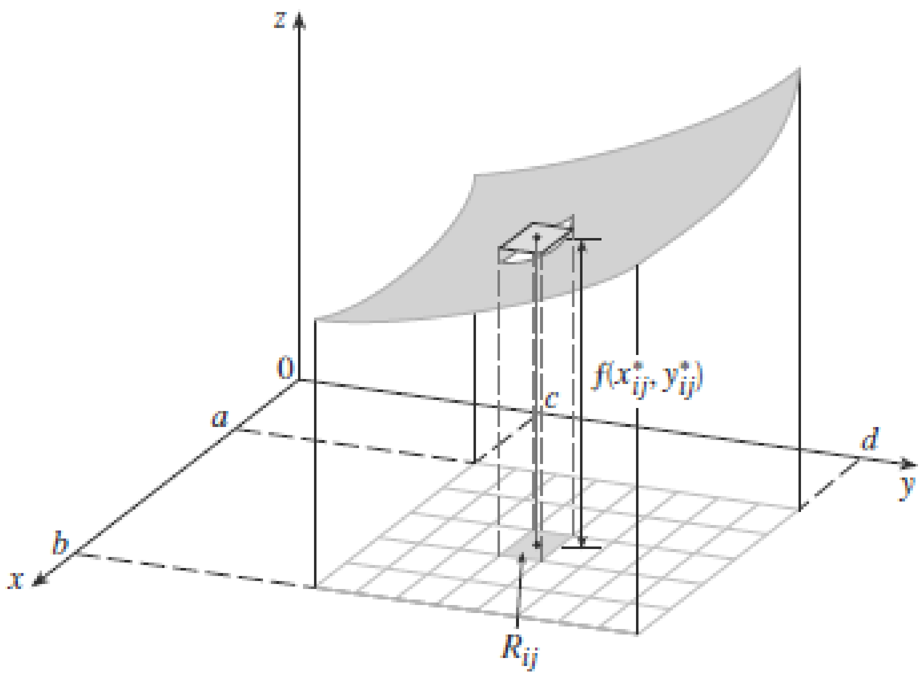
Traçando retas paralelas aos eixos coordenados passando pelas extremidades dos subintervalos, formamos os sub-retângulos:

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x, y) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$$

onde cada sub-retângulo tem área $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$, como na figura abaixo:



Se escolhemos um ponto amostral (x_{ij}^*, y_{ij}^*) em cada sub-retângulo R_{ij}, então podemos aproximar a parte de S que está acima de cada R_{ij} por um paralelepípedo de base R_{ij} e altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, como na figura a seguir:

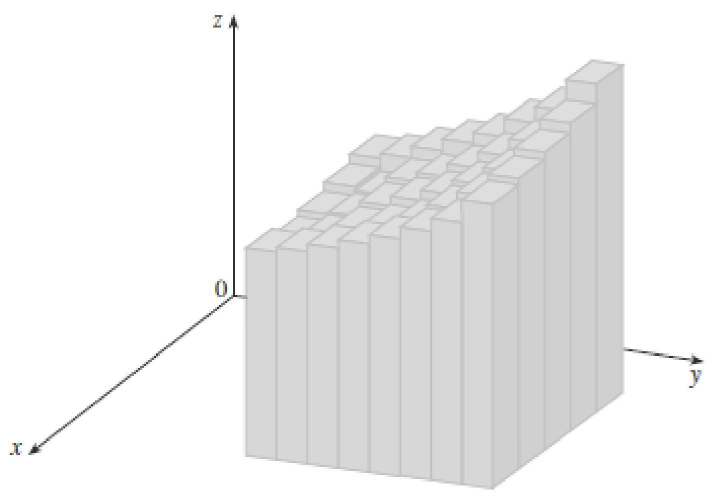


O volume deste paralelepípedo á a base de R_{ij} vezes a altura $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$, isto é, $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \cdot \Delta A$.

Se repetirmos este processo para todos os R_{ij} e somarmos os respectivos volumes dos paralelepípedos, conseguiremos uma aproximação para o volume total do sólido em questão, como segue:

$$V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

A soma dupla acima significa que para cada sub-retângulo calculamos o valor da função no ponto amostral, multiplicamos pela área do sub-retângulo e adicionamos os resultados, como na figura abaixo:



De acordo com a figura, nossa intuição nos diz que quanto mais aumentarmos os valores de m e n, os paralelepípedos ficam mais finos, e desta forma, o volume V fica mais preciso. Assim, devemos esperar que :

$$V = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

Diante disto, obtemos a seguinte:

Definição: A integral dupla de uma função f sobre um retângulo R é:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\, \Delta A$$

se o limite acima existir.

Pode-se provar que o ponto amostral (x_{ij}^*, y_{ij}^*) na expressão acima, pode ser qualquer ponto no retângulo R_{ij}. Se tomarmos o ponto (x_i, y_j), a expressão da soma dupla fica mais simples, como abaixo:

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \lim_{m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\, \Delta A$$

Assim, de acordo com as expressões acima, podemos ver que o volume do sólido V pode ser determinado como uma integral dupla:

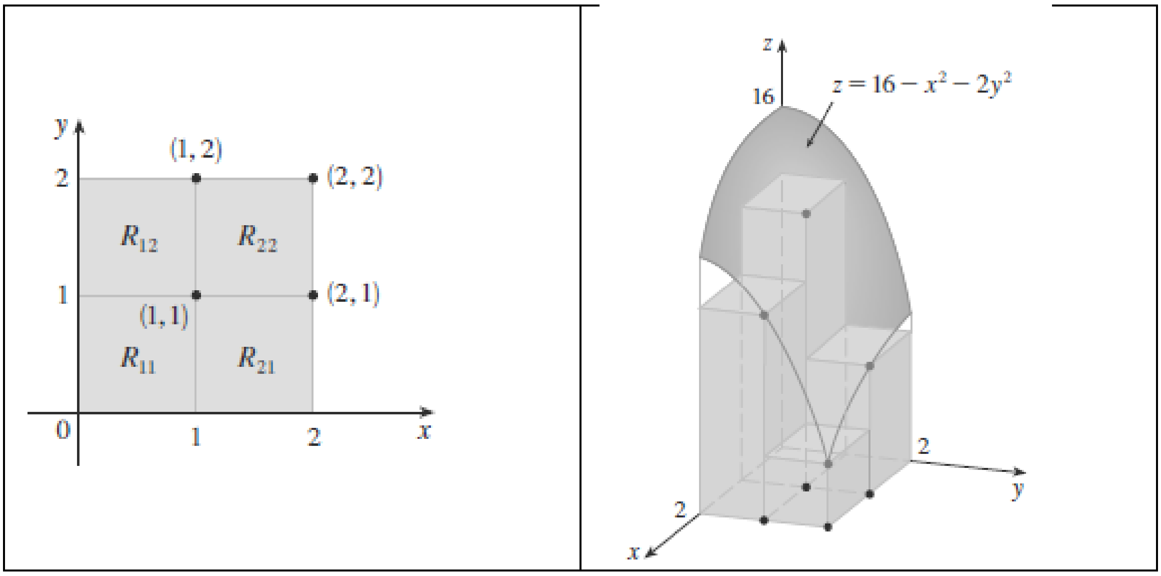
Se $f(x, y) \geq 0$, então o volume V do sólido que está entre o retângulo R e a superfície $z = f(x, y)$ é:

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Exemplo: Estime o volume do sólido que está entre o quadrado [0,2] x [0,2] e o paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$.Divida R em 4 quadrados iguais e escolha o ponto amostral para ser o quanto superior direito de cada quadrado R_{ij} . Faça um esboço do sólido e dos paralelepípedos aproximantes.

Solução:

Segue abaixo o gráfico da região R e da superfície:

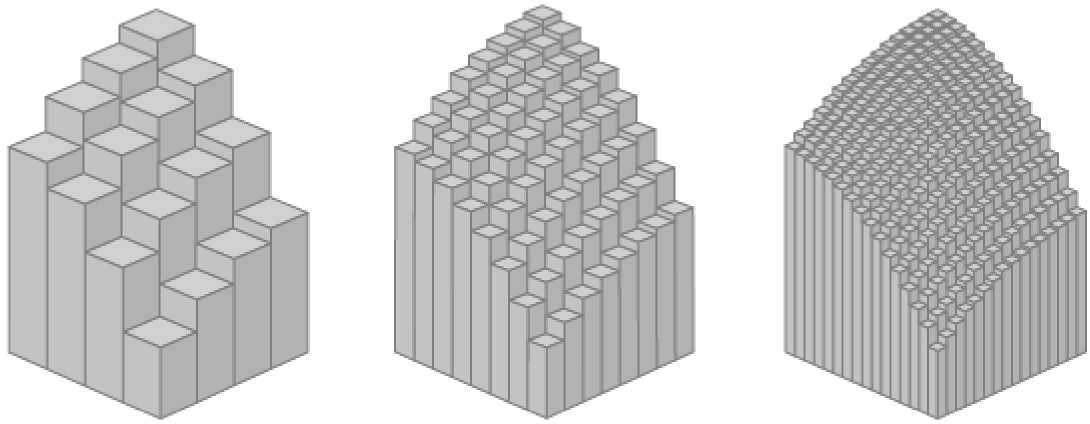


Aproximando o volume acima pela soma de Riemann para m=n=2, temos:

$$
\begin{aligned}
V &\approx \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\, \Delta A \\
&= f(1,1)\,\Delta A + f(1,2)\,\Delta A + f(2,1)\,\Delta A + f(2,2)\,\Delta A \\
&= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34
\end{aligned}
$$

Conseguiremos melhores aproximações para o volume se aumentarmos o número de quadrados na região R. Como consequência, teremos um número maior de paralelepípedos, cada vez mais finos.

A figura abaixo mostra tal situação:



(a) $m = n = 4, V \approx 41.5$ (b) $m = n = 8, V \approx 44.875$ (c) $m = n = 16, V \approx 46.46875$

OBSERVAÇÃO:

Caso a função f apresente tanto valores positivos quanto valores negativos em R, o limite apresentado NÃO REPRESENTA o volume entre a região R e a superfície acima do plano xy, mas sim a diferença de volumes entre elas. Desta forma, podemos então generalizar :

$$V = \iint_R f(x,y)dA$$

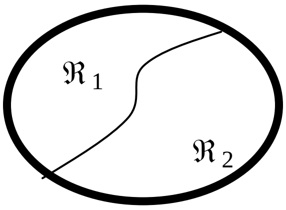
" Se f possui valores positivos e negativos em R, então um valor positivo para a integral dupla de f em R significa que há mais volume acima que abaixo de R. Um valor negativo indica o contrário e zero indica volumes iguais acima e abaixo de R."

<u>Propriedades</u> :

I) $\iint_R c.f(x,y)dA = c.\iint_R f(x,y)dA$.

II) $\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$.

III) Se $\Re$ é a união de duas regiões não-superpostas $\Re_1$ e $\Re_2$



$\therefore \iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$.

IV) Se **f(x,y)** ≥ 0 em toda $\Re$, então $\iint_R f(x,y)dA \geq 0$.

<u>Calculando as integrais duplas para Região $\Re$ retangular</u>

Adotando como **Integrais Parciais** as integrais $\int_a^b f(x,y)dx$ e $\int_c^d f(x,y)dy$ em relação a **x** e **y,** respectivamente, então integramos a **primeira** integral com **y** fixo e a **segunda** com **x** fixo. Vejamos os exemplos:

1)
$$\begin{cases} \int_0^1 xy^2dx = y^2\int_0^1 xdx = y^2\left(\dfrac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = y^2.\dfrac{1}{2} = \dfrac{y^2}{2} \\ \\ \int_0^1 xy^2dy = x\int_0^1 y^2dy = x\left(\dfrac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = x.\dfrac{1}{3} = \dfrac{x}{3} \end{cases}$$

O processo utilizado acima é chamado **Integração Iterada (** ou repetida **)**,e nós usaremos tal processo para calcular as integrais duplas, daí:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$$

São as Integrais Iteradas.

2) $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)\,dy\,dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 (1+8xy)\,dy \right] dx = \int_0^3 \left[\left(y + 8x\frac{y^2}{2} \right) \Big|_1^2 \right] dx = \int_0^3 \left[\left(y + 4xy^2 \right) \Big|_1^2 \right] dx =$

$= \int_0^3 [(2+4x.4)-(1+4x)]\,dx = \int_0^3 [2+16x-1-4x]\,dx = \int_0^3 (12x-1)\,dx = (6x^2+x) \Big|_0^3 =$

$= (6.3^2 + 3) = 54 + 3 =$ **57** .

3) Calcule agora você: $\int_1^2 \int_0^3 (1+8xy)\,dx\,dy =$

Coincidência ?

Veja o teorema abaixo :

Teorema de Fubini: Se **f(x,y)** for contínua no retângulo
$R = \{(x, y) |\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$, então:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx$$

Aplicação do teorema :

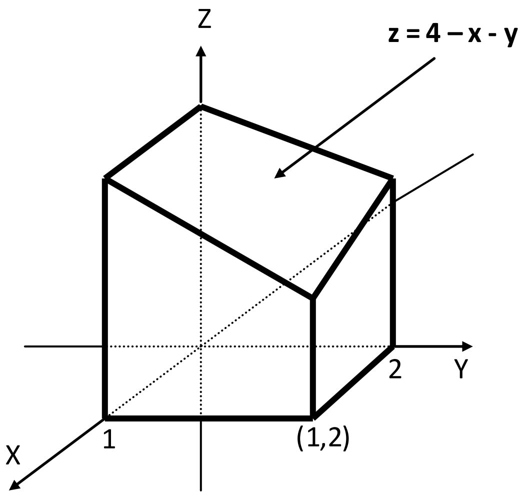
Calcule $\iint_R y^2x\ dA$ no retângulo $\Re$ **= { (x,y) : -3 ≤ x ≤ 2, 0 ≤ y ≤ 1 }** .

<u>Resolução</u> :

$$\iint_R y^2 x dA = \int_{-3}^{2}\int_{0}^{1}(y^2x)dydx = \int_0^1\int_{-3}^{2}(y^2x)dxdy = \int_0^1\left[\int_{-3}^{2}(y^2x)dx\right]dy = -\frac{5}{6}\ .$$

4) Use a integral dupla para achar o volume do sólido limitado acima pelo plano **z = 4 – x – y** e abaixo pelo retângulo $\Re$ **= [0,1] X [0, 2]** .

<u>Resolução</u> :



$$\mathbf{V} = \iint_R (4-x-y)dA = \int_0^2\int_0^1(4-x-y)dxdy = \int_0^2\left[\int_0^1(4-x-y)dx\right]dy = \int_0^2\left[\left(4x-\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_0^1\right]dy =$$

$$= \int_0^2\left(4-\frac{1}{2}-y\right)dy = \int_0^2\left(\frac{7}{2}-y\right)dy = \left(\frac{7}{2}y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^2 = \frac{7.2}{2}-\frac{2^2}{2} = 7-2 \Leftrightarrow \quad \mathbf{V = 5\ u.v}\quad .$$

Exercícios :

1) Calcule as integrais iteradas :

a) $\int_0^1\int_0^2 (x+3)dy\,dx$ **b)** $\int_{-1}^2\int_1^4 (2x+6x^2y)dy\,dx$ **c)** $\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} (e^{x+y})dy\,dx$

2) Calcule as integrais duplas na região retangular $\Re$ **.**

a) $\iint_R 4xy^3 dA$**;** $\Re$ **= { (x, y) : -1** $\le$ **x** $\le$ **1**, **-2** $\le$ **y** $\le$ **2 }** .

b) $\iint_R x.\sqrt{1-x^2}\,dA$**;** $\Re$ **= { (x, y) : 0** $\le$ **x** $\le$ **1**, **2** $\le$ **y** $\le$ **3 }** .

3) O volume sob o plano **z = 2x + y** e acima do retângulo $\Re$ **= { (x, y) : 3** $\le$ **x** $\le$ **5**, **1** $\le$ **y** $\le$ **2 }**.