Geometria Analítica

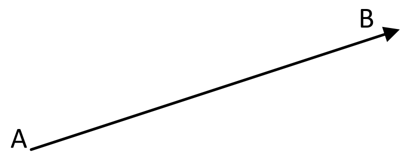
Prof Luis Carlos

Aula 1: Vetores – tratamento geométrico

1. Segmentos orientados:

Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos (A , B).

A é dito **origem** e B **extremidade** do segmento.



(A , B): segmento orientado de A para B.

(B , A): segmento orientado de B para A.

Logo, **(A , B) ≠ (B , A)**

Observação: se A = B, temos um segmento orientado nulo.

Geometricamente, o segmento orientado (A , B) será indicado por uma flecha de A até B.

Comprimento:

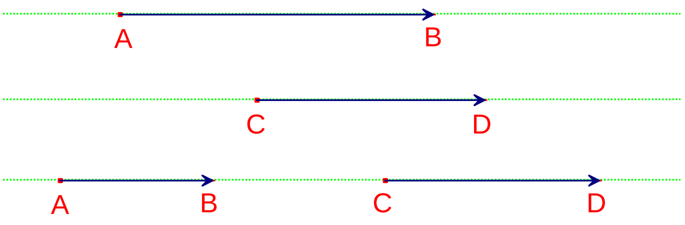
A cada segmento orientado, podemos associar um número real (positivo ou nulo), seu comprimento, que é a sua medida.

Utilizaremos **u.c.: unidade de comprimento**, para designar a unidade de medida do segmento.

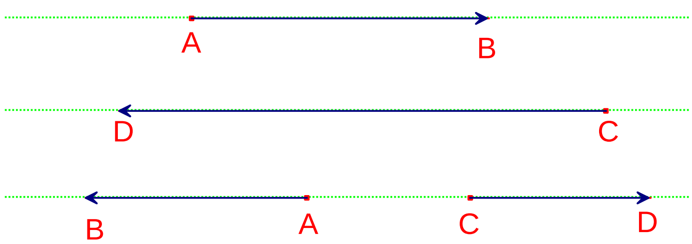
Direção e sentido:

Dados dois segmentos orientados não nulos (A , B) e (C , D) dizemos que eles têm mesma direção se as retas AB e CD são paralelas (ou coincidentes). Só podemos comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm mesma direção.

Exemplos:



mesmo sentido

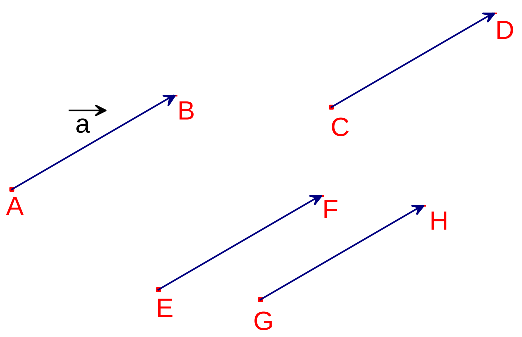


sentidos contrários

2. Vetores:

Um vetor é o conjunto de todos os segmentos orientados que têm a **mesma direção** (paralelos), o **mesmo sentido e** o **mesmo comprimento**.

Exemplo:



$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} // \overrightarrow{EF} // \overrightarrow{GH}$$

Notação: $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ ou B – A

Observações:

i) Um mesmo vetor pode ter vários **representantes:**

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$$

e, para citarmos um vetor, basta citar (ou desenhar) um deles.

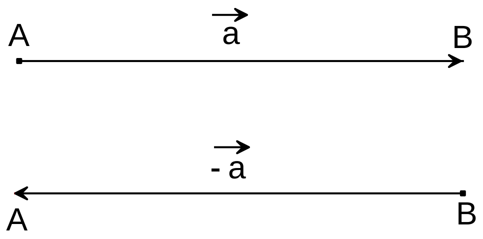
ii) A **norma** (ou módulo, ou comprimento) de um vetor é o comprimento de qualquer um de seus representantes.

Notação: $\| \vec{a} \|$ ou $| \vec{a} |$

No exemplo acima, temos: $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{EF}\| = \|\overrightarrow{GH}\|$

Casos particulares de vetores:

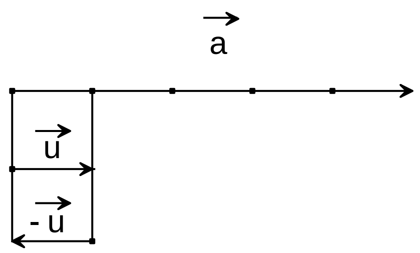
- $\overrightarrow{BA}$: vetor oposto de $\overrightarrow{AB}$



$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

- $\vec{O}$ ou $\overrightarrow{AA}$: vetor nulo (a origem coincide com a extremidade)
- Se $\vec{a}$ é tal que $\|\vec{a}\|$ = 1, então ele é um vetor unitário
- **Versor**: a cada vetor não nulo $\vec{a}$ podemos associar dois vetores unitários de mesma direção $\vec{u}$ e $-\vec{u}$.

  Exemplo:

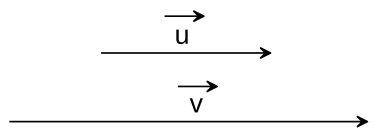


$$\left.\begin{array}{r}\left\|\vec{a}\right\| = 5 \text{ u.c.}\\ \left\|\vec{u}\right\| = \left\|-\vec{u}\right\| = 1 \text{ u.c.}\end{array}\right\rangle \vec{u} = \frac{1}{5}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}$$

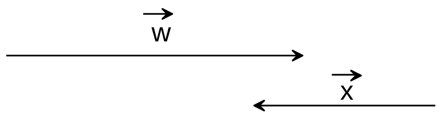
O vetor $\vec{u}$ que tem mesmo sentido de $\vec{a}$ é um **versor** de $\vec{a}$.

- **Vetores paralelos**:

  Exemplos:



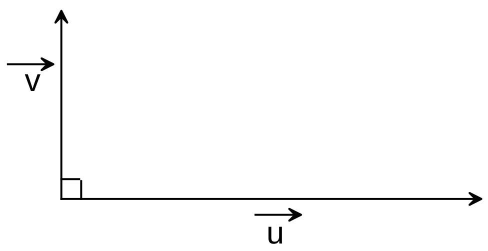
paralelos de mesmo sentido

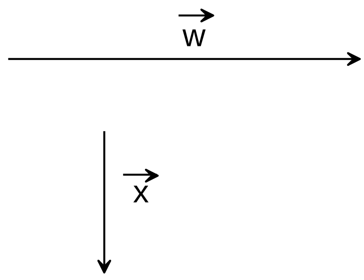


paralelos de sentidos contrários

- **Vetores ortogonais**:

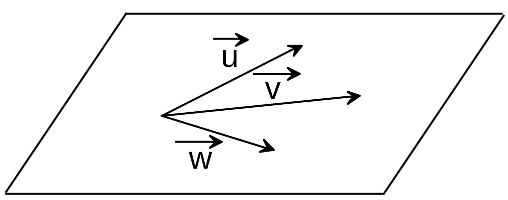
  Exemplos:



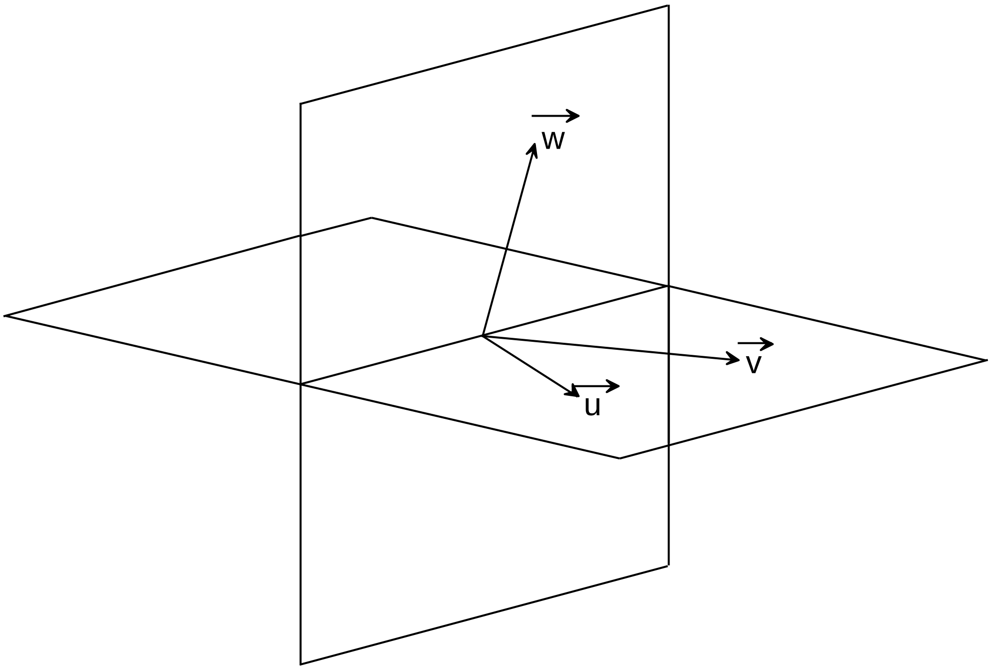


- **Vetores coplanares**: quando estão no mesmo plano.

  Exemplos:



$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares



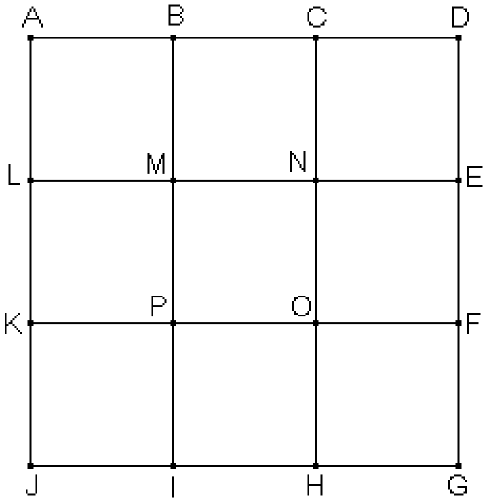
$\vec{u}, \vec{v}$ são coplanares

$\vec{w}$ não é coplanar a $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Observação: dois vetores quaisquer são sempre coplanares.

Exercícios resolvidos:

1) A figura abaixo é constituída por 9 quadrados congruentes:



Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OF}$

(V) os vetores são iguais pois têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

b) $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{PH}}$

(V) os vetores são iguais pois têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

c) $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \overrightarrow{\mathrm{MG}}$

(V) os vetores são iguais pois têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

d) $\overrightarrow{\mathrm{KN}} = \overrightarrow{\mathrm{FI}}$

(F) pois esses vetores têm sentidos opostos.

e) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{HI}}$

(V) esses vetores têm mesma direção.

f) $\overrightarrow{\mathrm{JO}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{LD}}$

(F) esses vetores não têm mesma direção.

g) $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{FG}}$

(V) esses vetores têm mesma direção.

h) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{EG}}$

(V) esses vetores são ortogonais.

i) $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BL}}$

(V) esses vetores são ortogonais.

j) $\overrightarrow{\mathrm{PE}} \perp \overrightarrow{\mathrm{EC}}$

(F) esses vetores não são ortogonais.

k) $\overrightarrow{\mathrm{PN}} \perp \overrightarrow{\mathrm{NB}}$

(V) esses vetores são ortogonais.

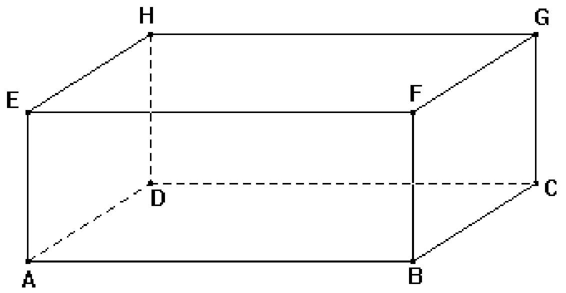
l) $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{FP}\right\|$

(V) pois os comprimentos desses dois vetores são iguais.

m) $\left\|\overrightarrow{IF}\right\| = \left\|\overrightarrow{MF}\right\|$

(V) pois os comprimentos desses dois vetores são iguais.

2) A figura abaixo representa um paralelepípedo retângulo:



Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BF}$

(V) os vetores são iguais pois têm mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento.

b) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HG}$

(F) o vetor $-\overrightarrow{HG}$ é o vetor $\overrightarrow{GH}$ que tem sentido oposto ao do vetor $\overrightarrow{AB}$.

c) $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CG}$

(V) esses vetores são ortogonais.

d) $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{BC}$

(V) esses vetores são ortogonais.

e) $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{HF}\|$

(V) pois os comprimentos desses dois vetores são iguais.

f) $\overrightarrow{\|AG\|} = \|\overrightarrow{DF}\|$

(V) pois os comprimentos desses dois vetores são iguais.

g) $\overrightarrow{BG} \parallel \overrightarrow{ED}$

(F) esses vetores não têm mesma direção.

h) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CG}$ são coplanares

(F) esses vetores não estão no mesmo plano.

i) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FG}$ e $\overrightarrow{EG}$ são coplanares

(V) os vetores $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$ e $\overrightarrow{EG}$ estão no mesmo plano.

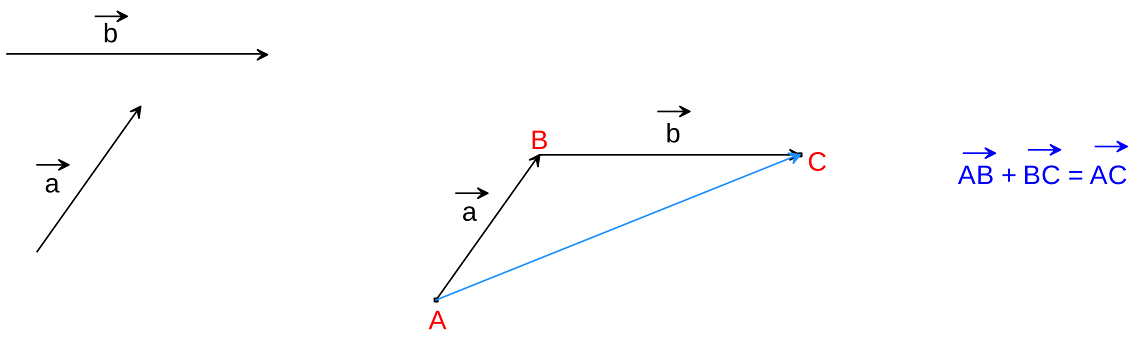
Operações com vetores

1. Adição / Subtração de vetores:

Vamos fazer a adição de vetores de duas maneiras:

1.1. Consideremos um representante qualquer do vetor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ e o representante do vetor $\vec{b}$ que tem origem B. Seja C a extremidade deste último. Fica assim determinado o vetor $\overrightarrow{AC}$ que por definição é um representante do vetor soma de $\vec{a}$ com $\vec{b}$.

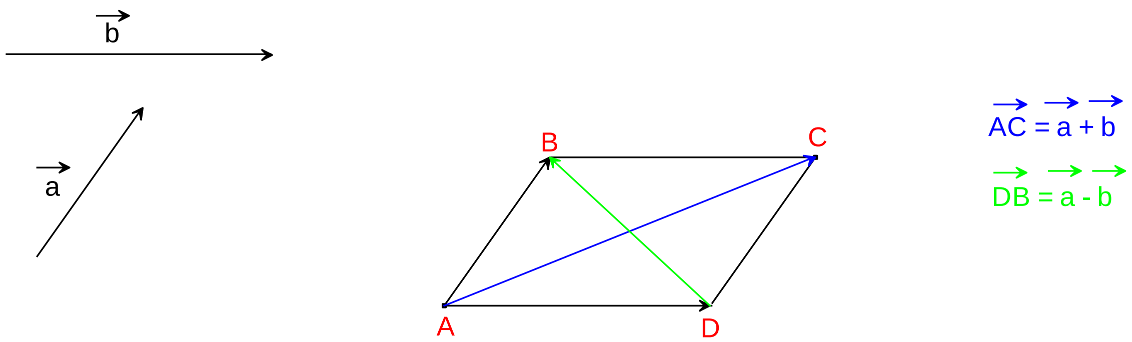
Exemplo:



1.2. Regra do paralelogramo:

Consiste em tomar representantes de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ com a **mesma origem** A e construir o paralelogramo ABCD. O vetor $\overrightarrow{AC}$ (uma das diagonais) é um representante do vetor soma $\vec{a} + \vec{b}$ e o vetor $\overrightarrow{DB}$ (a outra diagonal) é um representante do vetor diferença $\vec{a} - \vec{b}$.

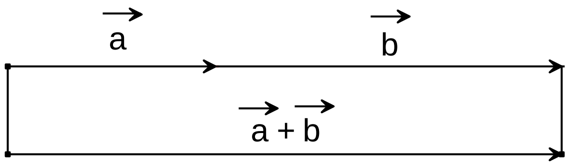
Exemplo:



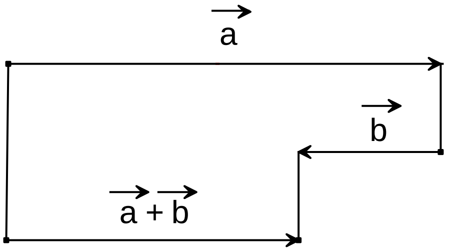
Observação: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$: soma do vetor $\vec{a}$ com o vetor oposto de $\vec{b}$.

Observações:

a) Sendo $\vec{a} \,//\, \vec{b}$, temos:



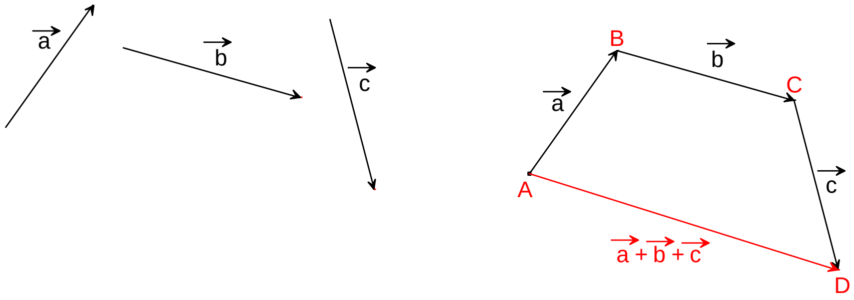
mesmo sentido



sentidos contrários

b) Para se determinar a soma de três vetores ou mais, o procedimento é análogo.

Exemplo:



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

Propriedades:

P_1 – comutativa: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

P_2 – associativa: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

P_3 – elemento neutro: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

P_4 – elemento oposto: $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$

2. Multiplicação de número real por vetor:

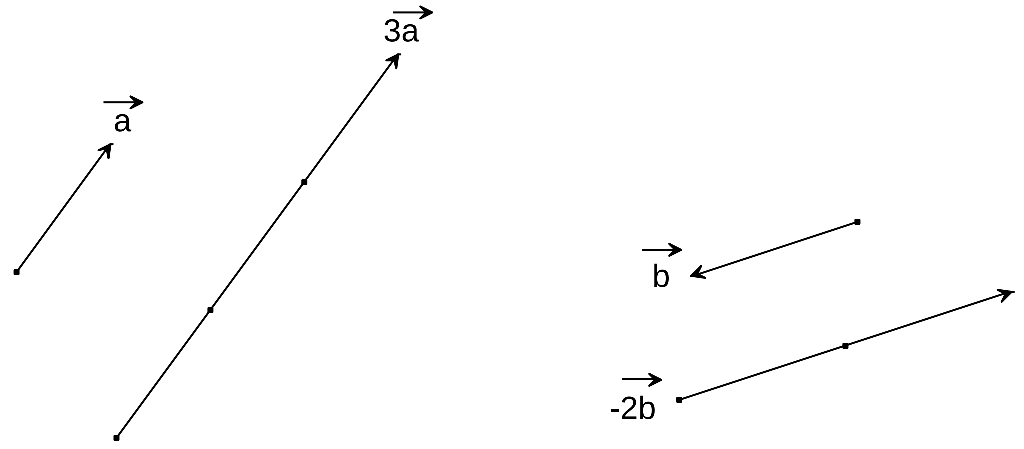
Sendo $\vec{v} \neq \vec{0}$ e $\alpha \neq 0$ (α é um número real), chama-se produto do número real α pelo vetor $\vec{v}$, o vetor $\alpha\vec{v}$ tal que:

i) Módulo: $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{v}\|$

ii) Direção: $\alpha\vec{v} \mathbin{//} \vec{v}$

iii) Sentido: $\alpha\vec{v}$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}$, se $\alpha > 0$; $\alpha\vec{v}$ tem o sentido oposto ao de $\vec{v}$, se $\alpha < 0$.

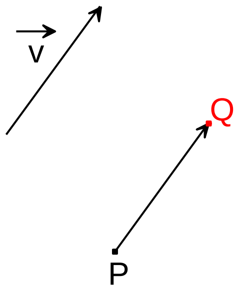
Exemplos:



3. Soma de ponto com vetor:

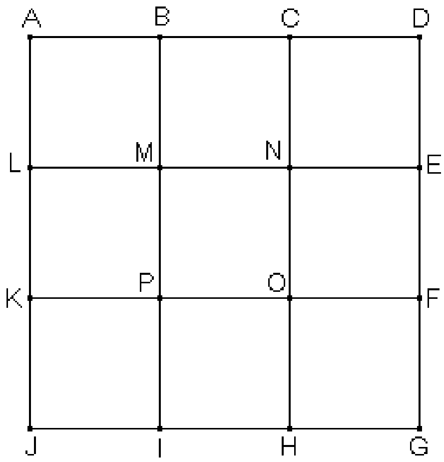
Dados P um ponto e $\vec{v}$ um vetor, definimos P + $\vec{v}$ = Q. Ou seja, a soma do ponto P com o vetor $\vec{v}$ é um ponto Q, sendo $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$.

Exemplo:



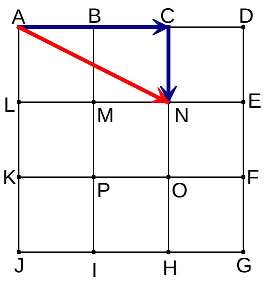
Exercício resolvido:

Com base na figura abaixo, determinar os vetores, expressando-os com origem no ponto A:



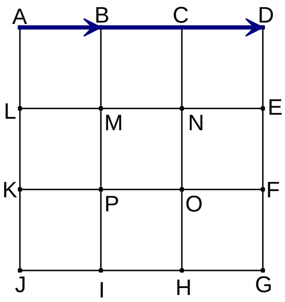
a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ =

Solução: $\overrightarrow{AN}$



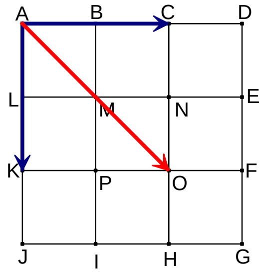
b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ =

Solução: $\overrightarrow{AD}$



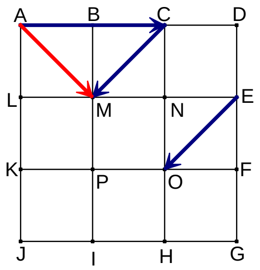
c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AK}$ =

Solução: $\overrightarrow{AO}$



d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EO} =$

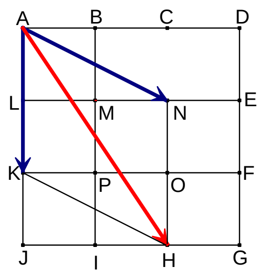
Solução: $\overrightarrow{AM}$



$\overrightarrow{EO} = \overrightarrow{CM}$

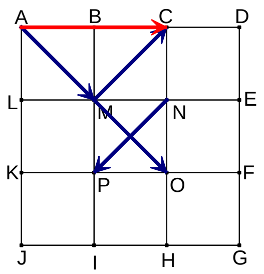
e) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AN} =$

Solução: $\overrightarrow{AH}$



f) $\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{NP} =$

Solução: $\overrightarrow{AC}$

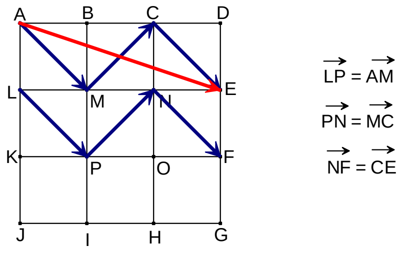


$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{AM}$

$-\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MC}$

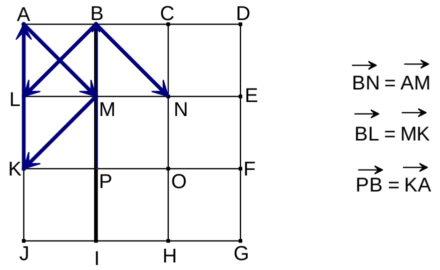
g) $\overrightarrow{LP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NF} =$

Solução: $\overrightarrow{AE}$



h) $\overrightarrow{BL} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PB} =$

Solução: $\overrightarrow{AA}$



REFERÊNCIAS

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. São Paulo: Pearson, 2010.

STEINBRUCHY, Alfredo; WINTERLE, Paulo. *Geometria Analítica.* São Paulo: Makron Books, 1987.

WINTERLE, Paulo. *Vetores e Geometria Analítica*. São Paulo: Makron Books, 2000.