Centro Paula Souza — GOVERNO DO ESTADO SÃO PAULO		Fatec Itaquera Prof. Miguel Reale CURSO: Fabricação Mecânica	
Disciplina	Cálculo 2	Professor(a)	Luis Carlos Barbosa Oliveira
Aluno(a)	GABARITO	RA:	
Semestre	2º Turno:	Data:	
Avaliação Oficial – P2 A		Nota:	

INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO: PROVA ESCRITA-SEM CONSULTA

DURAÇÃO 120 MINUTOS

INSTRUÇÕES PARA A PROVA : Respostas à tinta. Numerar as páginas. Responder em qualquer ordem desde que indicadas. Identificar em todas as folhas: nome, semestre, turno, curso e disciplina.

Objetivo: Avaliar o conhecimento sobre derivada e integral de funções de duas variáveis;
Conteúdos: Derivadas parciais de primeira e segunda ordem; derivada direcional; Integrais duplas em regiões retangulares e não retangulares; cálculo volumes de sólidos.
Habilidades: Calcular derivadas e variações de funções de duas variáveis; calcular integrais duplas e volumes de sólidos limitados por regiões planas.

Questão 1) (2,0 pontos) Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo x, da região limitada pelas funções $y = x^2 + 1$;

$$y = 0 \;;\; x = 0 \;;\; x = 2$$

$$V_R = \pi \int_0^2 (x^2+1)^2\, dx = \pi \cdot \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1)\, dx =$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x \Big|_0^2 \right] = \pi \left[\left(\frac{2^5}{5} + \frac{2(2)^3}{3} + 2 \right) - 0 \right] =$$

$$= \frac{206}{15}\pi .$$

Questão 2) (1,5 ponto) Determine as derivadas parciais de 1ª ordem da função $f(x,y) = x \cdot \ln(x^2 + y^2)$

$$f_x(x,y) = \ln(x^2+y^2) + x \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)} \cdot (2x) =$$

$$= \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{(x^2+y^2)}$$

$$f_y(x,y) = 0 \cdot \ln(x^2+y^2) + x \cdot \frac{1}{(x^2+y^2)} \cdot 2y =$$

$$= \frac{2xy}{(x^2+y^2)}$$

Questão 3) (1,5 ponto) Determine as derivadas de 1ª e 2ª ordem da função $f(x,y) = \frac{xy}{x-y}$

$$f_x(x,y) = \frac{y(x-y) - xy(1)}{(x-y)^2} = \frac{xy - y^2 - xy}{(x-y)^2} = \frac{-y^2}{(x-y)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{x(x-y) - xy(-1)}{(x-y)^2} = \frac{x^2 - xy + xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\cancel{0(x-y)^2} - (-y^2)(2(x-y)(1))}{((x+y)^2)^2} = \frac{y^2(2x-2y)}{(x+y)^4}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{-2y(x-y)^2 - (-y^2(2(x-y)(-1)))}{((x+y)^2)^2} = \frac{-2y(x-y)^2 - y^2(2x-2y)}{(x+y)^4}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{0(x-y)^2 - x^2(2(x-y)(-1))}{((x+y)^2)^2} = \frac{x^2(2x-2y)}{(x+y)^4}$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{2x(x-y)^2 - x^2(2(x-y)(1))}{((x+y)^2)^2} = \frac{2x(x-y)^2 - x^2(2x-2y)}{(x+y)^4}$$

Questão 4) (2,0 ponto) Calcule as integrais duplas:

a) $\int_1^3 \int_0^1 1 + 4xy\, dxdy$ b) $\int_2^4 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\, dydx$

a) $\int_1^3 \left[\int_0^1 (1+4xy)\, dx \right] dy = \int_1^3 \left[x + 2yx^2 \Big|_0^1 \right] dy = \int_1^3 \left[x + 2yx^2 \Big|_0^1 \right] dy$

$= \int_1^3 \left[(1 + 2y(1) - 0 \right] dy = \int_1^3 (1+2y)\, dy = \left[y + y^2 \Big|_1^3 \right] =$

$= (3 + 3^2) - (1 + 1^2) = 10$

b) $\int_2^4 \left[\int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\, dy \right] dx = \int_2^4 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^1 \right] dx =$

$= \int_2^4 \left[x^2 + \frac{1}{3} + x^2 + \frac{1}{3} \right] dx = \int_2^4 \left[2x^2 + \frac{2}{3} \right] dx =$

$= \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{2}{3}x \Big|_2^4 \right] = \left(\frac{2(4)^3}{3} + \frac{2(4)}{3} \right) - \left(\frac{2(2)^3}{3} + \frac{2(2)}{3} \right) =$

$= \frac{128}{3} + \frac{8}{3} - \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = \frac{116}{3}$

Questão 5) (1,5 ponto) Calcule a integral dupla $\iint xy\sqrt{y^2+x^2}\ dA$ na região:

$$R = \{(x,y) \in R^2 \mid 1 \le x \le 2\,;0 \le y \le 1\}$$

$$\int_1^2\left[\int_0^1 xy(x^2+y^2)^{1/2}\,dy\right]dx = \int_1^2\left[\int_0^1 x\,u^{1/2}\,\frac{du}{2}\right]dx = \int_1^2 \frac{x}{2}\int_0^1 u^{1/2}\,du\Big]\,dx$$

$$= \int_1^2\left[\frac{x}{2}\left(\frac{2}{3}(y^2+x^2)^{3/2}\Big|_0^1\right]dx = \int_1^2\left[\frac{x}{3}\left((1+x^2)^{3/2} - (0+x^2)^{3/2}\right)\right]dx =$$

$$= \int_1^2\left(\frac{x}{3}(1+x^2)^{3/2}\right)dx - \int_1^2 \frac{x}{3}(x^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{6}\int u^{3/2}\,du - \frac{1}{3}\int x^4\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\Big|_1^2\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{x^5}{5}\Big|_1^2\right] = \frac{1}{15}\left[(1+4)^{5/2} - (2^{5/2})\right] - \frac{1}{15}\left[\left(2^5 - 1^5\right)\right] =$$

$$= \frac{19{,}25}{15} = 1{,}283$$

Questão 6) (1,5 ponto) Calcule o volume do sólido limitado pelo gráfico da função $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$ e pela região $R = \{(x,y) \in R^2 \mid 1 \le x \le 2\,;1 \le y \le 3\}$

$$V = \int_1^3\int_1^2 (16 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int_1^3\left[16x - \frac{x^3}{3} - xy^2\Big|_1^2\right]dy =$$

$$= \int_1^3\left[\frac{41}{3} - y^2\right]dy = \frac{56}{3}\ uV.$$