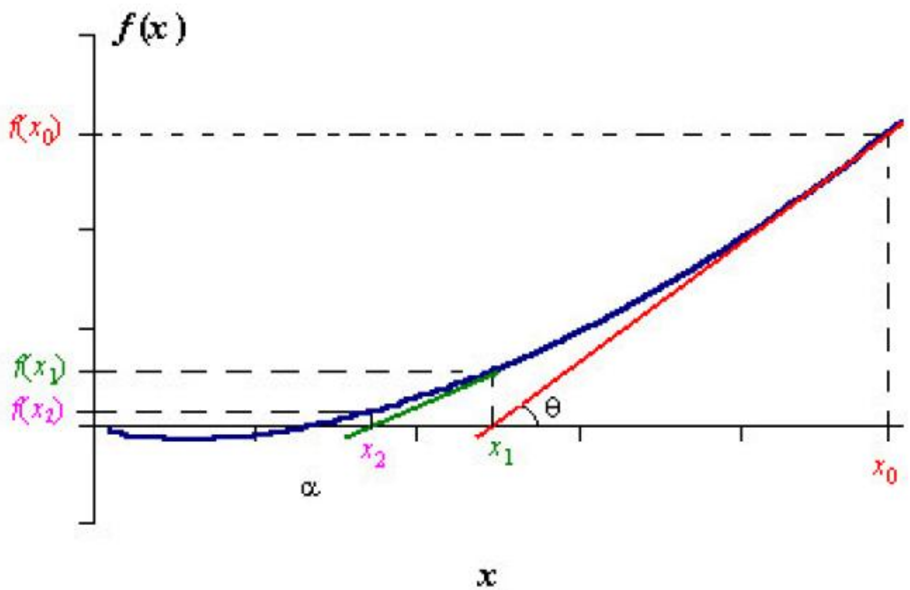
Cálculo Numérico
Método de Newton-Raphson

Prof Luis Carlos
FATEC

Método de Newton-Raphson

Considere as funções f(x), f'(x) e f''(x) contínuas em [a,b] e seja α, pertencente a [a,b] , o zero da função f.
Suponha que f'(α) $\neq$ 0, então a função f possui tangente única em cada ponto do intervalo.

Suponha uma aproximação inicial x_0 para α, como no gráfico:



Método de Newton-Raphson

Aproximamos a curva $f(x)$ pela tangente traçada no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Na intersecção desta reta com o eixo x, encontramos o ponto x_1, que é uma melhor aproximação que x_0, para o zero de $f(x)$, α.

Novamente, aproximamos a curva $f(x)$ pela tangente traçada no ponto $(x_1, f(x_1))$.

Na intersecção desta nova reta com o eixo x, encontramos o ponto x_2, que é uma melhor aproximação para o zero de $f(x)$, α, do que o ponto anterior. O processo se repete até que uma determinada precisão seja alcançada.

As expressões que permitem calcular os valores dos pontos x_1, x_2, ..., são obtidas a partir da tangente do ângulo que cada reta tangente faz com o eixo dos x. Assim,

$$\tan\theta = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0)$$

Método de Newton-Raphson

Explicitando o valor de x_1 temos: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

O valor de x_2 pode ser obtido a partir de x_1 usando $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Generalizando, $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, para $k = 0, 1, 2, \ldots$

Os valores das aproximações x para o zero de f(x) são calculados iterativamente até que: $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon_1$ ou $|f(x_{k+1})| < \varepsilon_2$,

em que $k = 0, 1, 2, \ldots$

Método de Newton-Raphson

Exemplo

Determinar o zero da função $f(x) = x\ln(x) - 1$, pelo método de *Newton-Raphson*, com $x_0 = 2$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-2}$.

A derivada de $f(x)$ é dada por: $f'(x) = \ln(x) + 1$

x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	x_1	$f(x_1)$	$\lvert x_1 - x_0\rvert < \varepsilon_1$ ou $\lvert f(x_1)\rvert < \varepsilon_2$	*Situação*
2	0.3863	1.6931	1.7718	0.0135	$\lvert 0.2282\rvert > 10^{-2}$ e $\lvert 0.0135\rvert > 10^{-2}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $f(x_0) \leftarrow f(x_1)$
1.7718	0.0135	1.5720	1.7632	0.0000	$\lvert 0.0086\rvert > 10^{-2}$ e $\lvert 0.0000\rvert < 10^{-2}$	$x_0 \leftarrow 1.7632$

Portanto, o zero de $f(x)$ é 1.7632, ou seja, o último valor de x_1 calculado tal que $\lvert f(x_1)\rvert < 10^{-2}$.

Observe que o processo para a obtenção do zero de $f(x)$ foi repetido 1 vez !

Método de Newton-Raphson

EXEMPLO 2:

Determinar o zero da função $\psi(x) = x^3 - 4x + 2$, pelo método de *Newton-Raphson*, com $x_0 = 0.5$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$.

A derivada de $\psi(x)$ é dada por : $\psi'(x) = 3x^2 - 4$

x_0	$\psi(x_0)$	$\psi'(x_0)$	x_1	$\psi(x_1)$	$\lvert x_1 - x_0\rvert < \varepsilon_1$ ou $\lvert\psi(x_1)\rvert < \varepsilon_2$	*Situação*
0.5	1.25000	-3.25000	0.53846	0.00228	$\lvert 0.03846\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 0.00228\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
0.53846	0.00228	-3.13018	0.53919	0.00000	$\lvert 0.00073\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 0.00000\rvert < 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow 0.53919$

Portanto, o zero de $\psi(x)$ é 0.53919, ou seja, o último valor de x_1 calculado tal que $\lvert\psi(x_1)\rvert < 10^{-3}$.

Observe que o processo para a obtenção do zero de $\psi(x)$ foi repetido 1 vez !

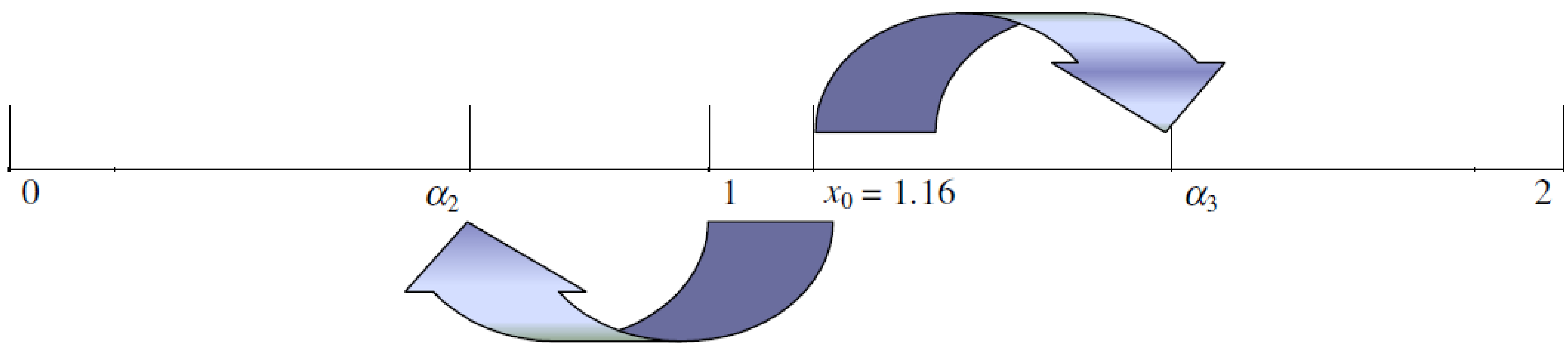
Método de Newton-Raphson

EXEMPLO 3:

Determinar o zero da função $\psi(x) = x^3 - 4x + 2$, pelo método de *Newton-Raphson*, com $x_0 = 1.16$ e $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$.

a função ψ possui três zeros : $\alpha_1 \in (-3,-2)$, $\alpha_2 \in (0,1)$ e $\alpha_3 \in (1,2)$.

Como $x_0 = 1.5$, podemos esperar que o método encontre ou α_2 ou α_3



A derivada de $\psi(x)$ é dada por : $\psi'(x) = 3x^2 - 4$.

Método de Newton-Raphson

x_0	$\psi(x_0)$	$\psi'(x_0)$	x_1	$\psi(x_1)$	$\lvert x_1-x_0\rvert < \varepsilon_1$ ou $\lvert\psi(x_1)\rvert < \varepsilon_2$	*Situação*
1.16000	-1.07910	0.03680	30.48348	28206.60802	$\lvert 29.32348\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 28206.60802\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
30.48348	28206.60802	2783.72734	20.35080	8348.98605	$\lvert -10.13268\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 8348.98605\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
20.35080	8348.98605	1238.46542	13.60941	2468.24108	$\lvert -6.74140\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 2468.24108\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
13.60941	2468.24108	551.64778	9.13510	727.78407	$\lvert -4.47431\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 727.78407\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
9.13510	727.78407	246.35013	6.18083	213.40111	$\lvert -2.95427\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 213.40111\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
6.18083	213.40111	110.60807	4.25149	61.84032	$\lvert -1.92934\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 61.84032\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
4.25149	61.84032	50.22545	3.02023	17.46905	$\lvert -1.23125\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 17.46905\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
3.02023	17.46905	23.36542	2.27259	4.64678	$\lvert -0.74765\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 4.64678\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
2.27259	4.64678	11.49396	1.86831	1.04823	$\lvert -0.40428\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 1.04823\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
1.86831	1.04823	6.47172	1.70634	0.14279	$\lvert -0.16197\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 0.14279\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
1.70634	0.14279	4.73475	1.67618	0.00463	$\lvert -0.03016\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 0.00463\rvert > 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow x_1$ $\psi(x_0) \leftarrow \psi(x_1)$
1.67618	0.00463	4.42871	1.67513	0.00001	$\lvert -0.00105\rvert > 10^{-3}$ e $\lvert 0.00001\rvert < 10^{-3}$	$x_0 \leftarrow 1.67513$

Método de Newton-Raphson

Portanto. o zero de $\psi(x)$ é 1.67513, ou seja, o último valor de x_1 calculado tal que $|\psi(x_1)| < 10^{-3}$.

Observe que o processo para a obtenção do zero de $\psi(x)$, nesse caso, foi repetido 11 vezes !

Note que inicialmente ocorre uma divergência da região onde se encontram os zeros da função ψ, no entanto, a partir da 9ª iteração, os valores começam a se aproximar de α_3. A causa desta divergência inicial é devido ao fato de que $x_0 = 1.16$ está próximo de $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ que é um zero de $\psi'(x)$. De fato,

$$\psi'(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow \psi'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Método de Newton-Raphson

Como escolher o x_0 (chute inicial) que garanta a convergência?

- Localize o intervalo que contem o zero da função. Note que para o método de Newton não são necessários os extremos do intervalo, apenas um bom chute inicial;

- Escolher um x0 tal que a derivada da função em x_0 seja diferente de zero. Além disso, que a derivada da função em x_0 não deve estar próxima de zero;

Método de Newton-Raphson

Convergência

A convergência do método de *Newton-Raphson* está garantida pelos seguintes:

Teorema 1:

Seia α um zero da função $f(x)$, isolado em um intervalo I centrado em a.
Seja. $\varphi(x)$ uma função iteração para a equação $f(x) = 0$. Se:

- $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ são contínuas em I,
- $|\varphi'(x)| \leq M < 1, \ \forall x \in I$ e
- $x_0 \in I$,

então a seqüência $\{x_k\}$ gerada pelo processo iterativo $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ converge para α.

Método de Newton-Raphson

Teorema 2:

Sejam $f(x)$, $f\,'(x)$ e $f\,''(x)$ contínuas em intervalo I que contém o zero, α, da função f. Suponha ainda que $f\,'(\alpha) \neq 0$.

Então, existe um intervalo $\bar{I} \subset I$, contendo o zero α, tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a seqüência $\{x_k\}$ gerada por $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ convergirá para α.

Algoritmo do Método de Newton

Para encontrar uma solução para $f(x)=0$, dada a derivada de $f(x)$ e uma aproximação inicial p_0.

- **Dados de Entrada**:

  Aproximação inicial p_0, precisão ou tolerância (ε) e o número máximo de iterações (ITMAX).

- **Saída**:

  PASSO 1

  Faça $i=1$

  PASSO 2:

  Enquanto $i \leq$ ITMAX, execute os passos 3 – 6

PASSO 3

Faça $p = p_0 - f(p_0) / f'(p_0)$ (calcular p_i)

PASSO 4

Se $|p - p_0| < \varepsilon$ então

Saída (p) (procedimento efetuado com sucesso)

FIM

PASSO 5

Faça $i = i + 1$

PASSO 6

Faça $p_0 = p$ (atualize p_0)

Passo 7:

Saída (solução não encontrada após ITMAX iterações)

FIM

Exercícios

1) Localize graficamente e algebricamente as raízes das equações abaixo. Em seguida determine todos os zeros das funções pelo método de Newton

a) $4\,cos x - e^{2x} = 0$
b) $(x/2) - tg\, x = 0$
c) $1 - x\, ln\, x = 0$
d) $2^x - 3x = 0$
e) $x^3 + x - 100 = 0$

2) Pede-se:

a) Faça o gráfico de $p(x) = x^5 - (10/9)\,x^3 + (5/21)x$
mostrando que esse polinômio tem
seus cinco zero reais todos no intervalo (-1,1), ou seja,
$\alpha_1 \in (-1, -0{,}75]$, $\alpha_2 \in [-0{,}75, -0.25]$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 \in [0.3, 0.8]$, $\alpha_5 \in [0.8, 1.0]$.

b) Obtenha a raiz α_1 a partir de x0 =-0.8 através do Método de Newton com $\varepsilon = 10^{-2}$
Qual a função de iteração para p(x)?
Qual o valor de α_1 obtido, quantas iterações necessárias e por que parou?