Cálculo Numérico
Aula 2
Zero de Função

Fabricação – 2 sem
Prof Luis Carlos

ZEROS DE FUNÇÃO

1 Introdução

Nas mais diversas áreas da Ciência ocorrem problemas relacionados à resolução de uma equação do tipo: $f(x) = 0$.

Consideremos, por exemplo, o seguinte circuito[1]:

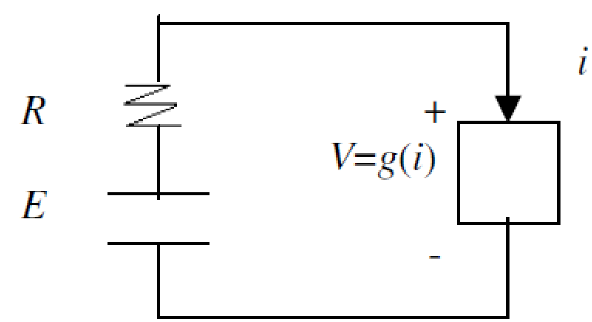


Fig. 2.1

A Fig. 2.1 simboliza um dispositivo não linear, uma vez que a tensão, V, é dada pela função g que é não linear e dependente da corrente, i. Dados E, R e supondo conhecida a característica do dispositivo $V=g(i)$, se desejarmos conhecer o valor da corrente i, basta resolvermos a seguinte equação:

$$\boxed{F(i) = E - Ri - g(i) = 0 \qquad \text{(Lei de } Kirchoff\text{)}}$$

Estamos interessados em encontrar o **zero da função** F.

Na prática, *g(i)* tem o aspecto de um polinômio do terceiro grau. Desta forma, não é trivial resolver a equação.

Definição: Um número real α é dito **zero da função** $f(x)$ se e, somente se, $f(\alpha) = 0$.

Exemplo 2.1

Seja $f : \Re \rightarrow \Re$, dada por $f(x) = x + 1$. Determinar :

a) o domínio de *f*.

$\Re$

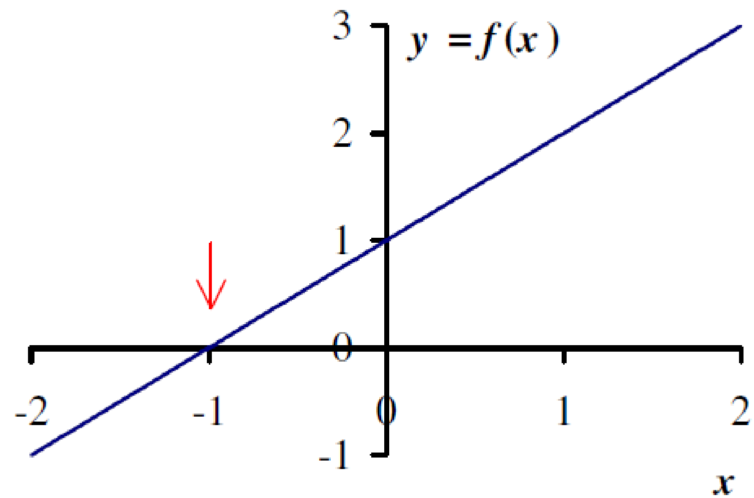
b) o contradomínio de *f*.

$\Re$

c) o zero de *f*.

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1.$$

d) o gráfico de *f*.



Exemplo 2.2

Seja $g : \Re \rightarrow \Re$, dada por $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Determinar :

a) o domínio de g.

$\Re$

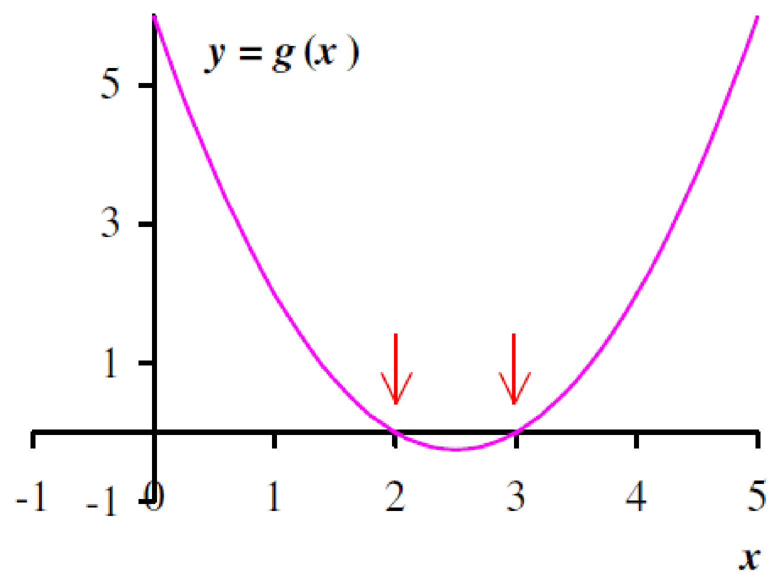
b) o contradomínio de g.

$\Re$

c) o(s) zero(s) de g.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3.$$

d) o gráfico de g.



Exemplo 2.3

Seja $\varphi : \Re^* \to \Re$, dada por $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$. Determinar:

a) o domínio de φ.

$\Re^*$

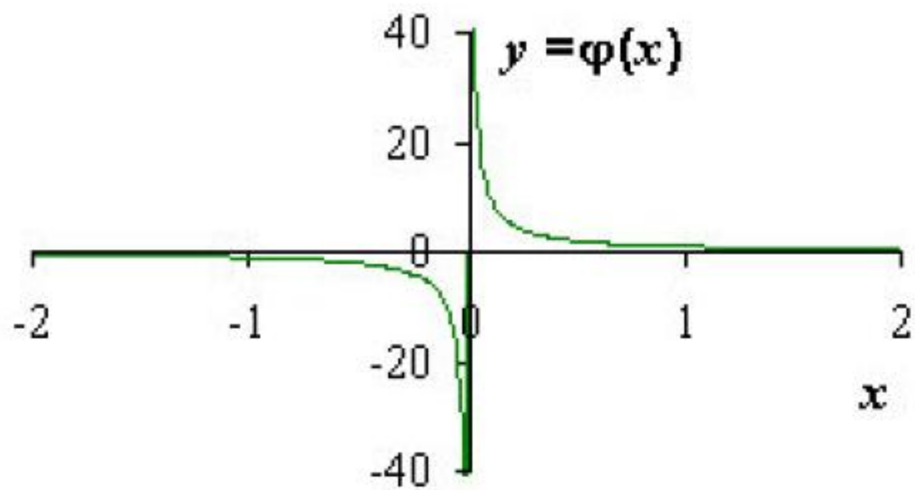
b) o contradomínio de φ.

$\Re$

c) o(s) zero(s) de φ.

$\nexists x : \dfrac{1}{x} = 0$. Logo, esta função não possui zero!!!

d) o gráfico de φ.



Exemplo 2.4

Seja $\psi : \Re \rightarrow \Re$, dada por $\psi(x) = x^3 - 4x + 2$. Determinar :

a) o domínio de ψ.

$\Re$

b) o contradomínio de ψ.

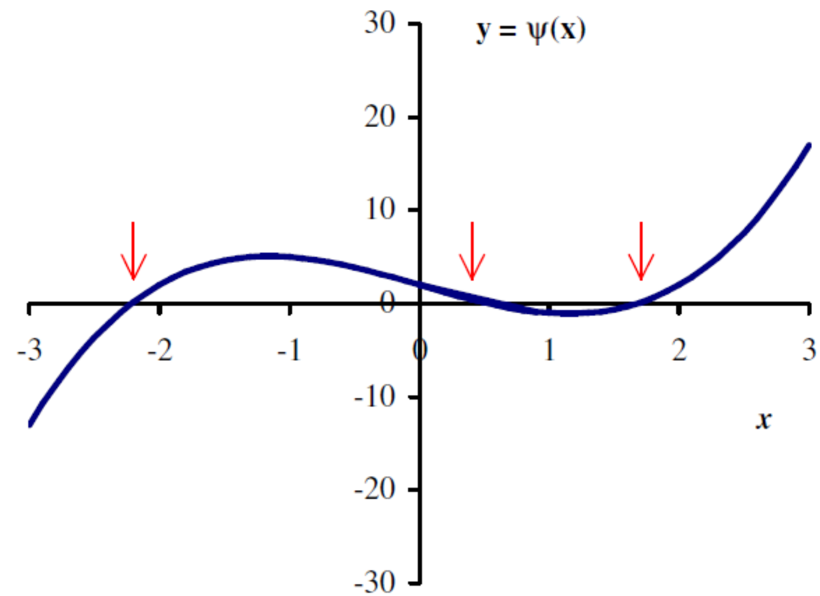
$\Re$

c) o(s) zero(s) de ψ.

Observe que para este caso torna-se complicado resolver analiticamente a equação dada por:

$$x^3 - 4x + 2 = 0.$$

d) o gráfico de ψ.



O gráfico desta função, nos mostra a localização de 3 zeros de ψ :

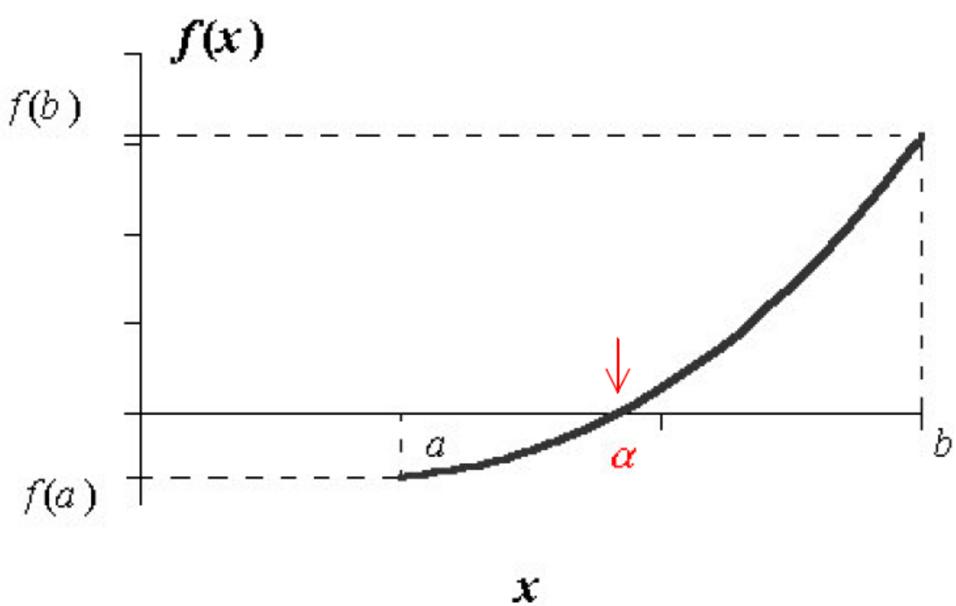
- $x_1 \in (-3,-2)$
- $x_2 \in (0,1)$
- $x_3 \in (1,2)$

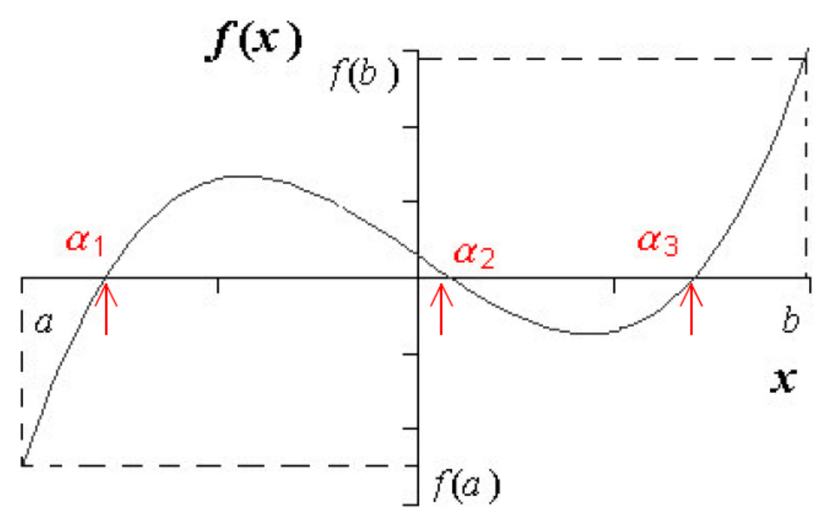
Fase 1 - localização dos zeros

A idéia central dos métodos é partir de uma aproximação inicial (um *chute*) para o zero da função (Fase 1) e em seguida refinar esta aproximação através de um processo iterativo até que o grau de exatidão desejado seja alcançado (Fase 2).

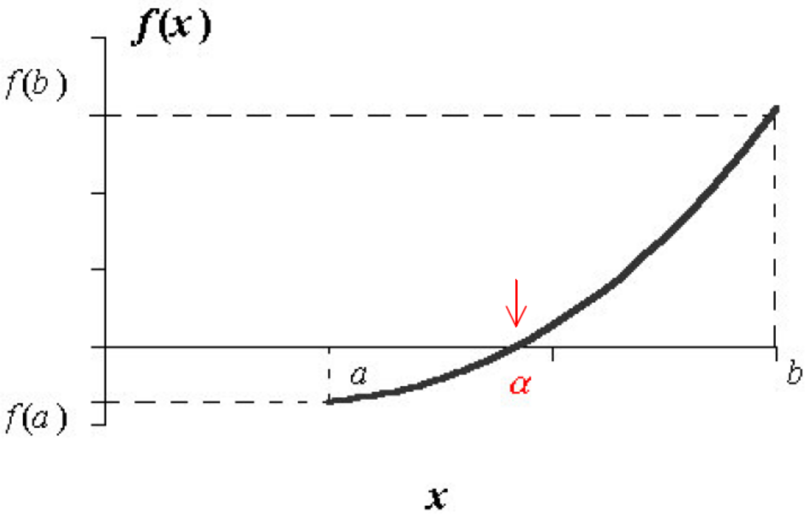
<u>Teorema 1 (ou do valor intermediário):</u> Seja $f(x)$ uma função *contínua* em um intervalo $[a,b]$. Se $f(a)\cdot f(b) < 0$ então existe **pelo menos** um ponto $x = \alpha$ entre a e b tal que $f(\alpha) = 0$.

A interpretação gráfica deste teorema é

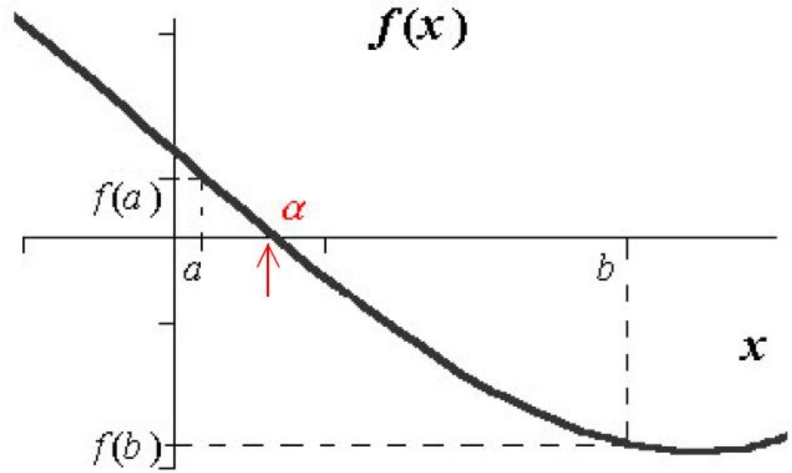




<u>Obs:</u> Sob as hipóteses do teorema anterior, se a *derivada* de f(x) ($f\,'(x)$) existir e preservar o sinal no intervalo (a,b), então neste intervalo há um **único** zero de $f(x)$.



$$f\,'(x) > 0, \forall x \in [a,b]$$



$$f\,'(x) < 0, \forall x \in [a,b]$$

Um método gráfico, ou uma tabela de valores pode ser de enorme utilidade para se avaliar a provável posição do(s) zero(s) de uma determinada função.

Na hipótese de se utilizar o método gráfico, faz-se um esboço, tão preciso quanto possível, de modo a se ter uma idéia de onde se localiza(m) o(s) zero(s) da função. Partindo desse valor, outros métodos podem ser utilizados para se obter o resultado com uma precisão maior, se necessário. Um bom gráfico resolverá um grande número de problemas, por tornar claro o(s) local(is) do(s) zero(s) procurado(s).

Da mesma maneira, uma tabela da função pesquisada, nos indicará aproximadamente a posição do(s) zero(s) da função, desde que as condições do *Teorema 1* sejam satisfeitas.

<u>Exemplo 2.5</u>

Seja $\phi : \Re \rightarrow \Re$, dada por $\phi(x) = x^3 - 2.9x^2 + 0.95x + 0.125$. Determinar o(s) intervalo(s) que contém (êm) o(s) zero(s) da função ϕ.

Podemos analisar este caso de duas maneiras:

- utilizando uma tabela de valores;
- esboçando o gráfico da função $\phi(x)$.

Para o 1º caso:

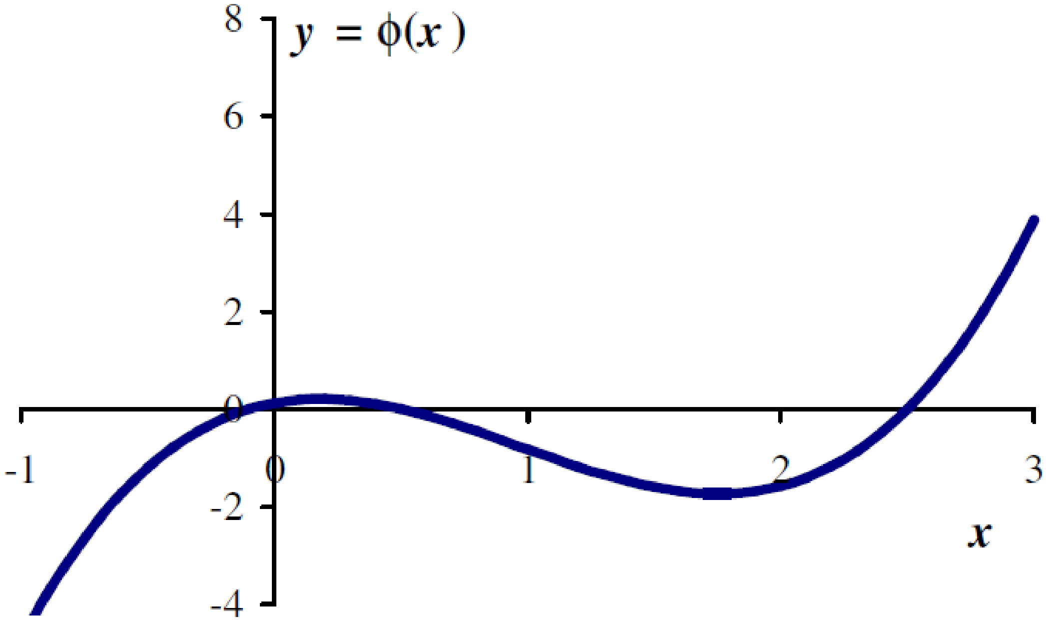
x	-2	-1	0	1	2	3
$\phi(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

I_1 I_2 I_3

Sabendo que a função ϕ é contínua para qualquer x real e observando as variações de sinal, podemos concluir que cada um dos intervalos $I_1 = [-1,0]$, $I_2 = [0,1]$ e $I_3 = [2,3]$, contém pelo menos um zero de $\phi(x)$.

Além disto, como a função ϕ é um polinômio de grau 3, cada intervalo possui um único zero de ϕ.

Para o 2º caso:



Observando o gráfico da função ϕ, podemos concluir que cada um dos intervalos $I_1 = [-1,0]$, $I_2 = [0,1]$ e $I_3 = [2,3]$, contém um único zero de $\phi(x)$.

Exemplo 2.6

Seja $h : D_h = \{x \in \Re : x > 0\} \rightarrow \Re$, dada por $h(x) = x\ln(x) - 1$. Determinar o intervalo que contém o zero da função h.

Usando a tabela de valores:

x	1	2	3	4	5	6
$h(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

I_1

Sabendo que a função h é contínua para qualquer x no D_h e observando a variação de sinal, podemos concluir que o intervalo $I_1 = [1,2]$ contém pelo menos um zero de $h(x)$.

Para saber se este zero é único neste intervalo, podemos analisar o sinal da derivada de $h(x)$:

$$h'(x) = \ln(x) + 1 \geq 0,\ x \geq 0.38$$

e

$$h'(x) = \ln(x) + 1 < 0,\ 0 < x < 0.38.$$

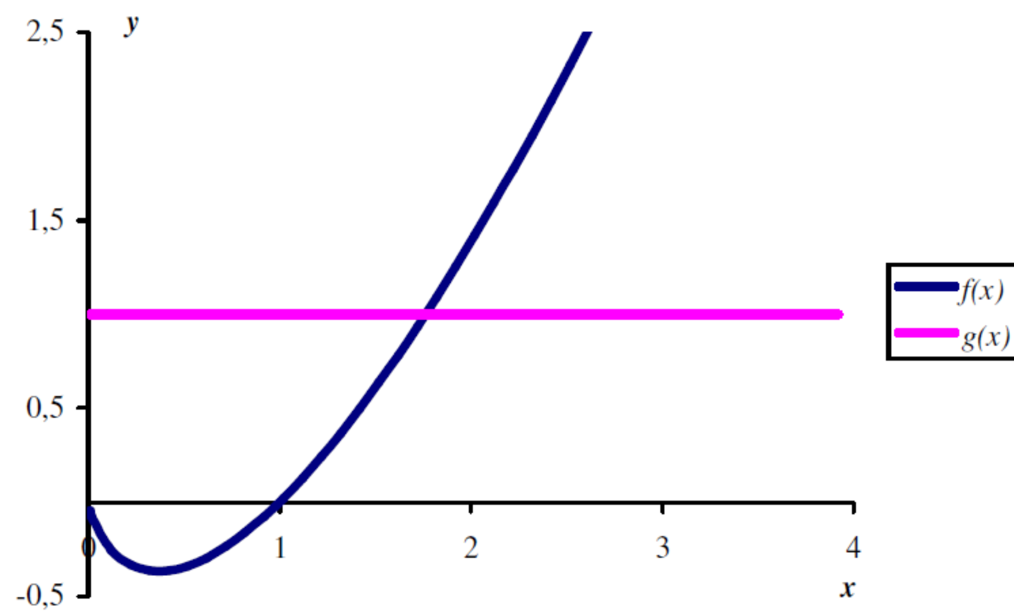
Assim, podemos concluir que $h(x)$ admite um único zero em todo seu domínio de definição, D_h, e este zero está no intervalo (1,2).

Usando o gráfico :

Como desejamos descobrir o zero da função h, isto é, queremos resolver a equação $h(x) = 0$, ou ainda, $x\ln(x) - 1 = 0 \Rightarrow x\ln(x) = 1$

Chamando $f(x) = x\ln(x)$ e $g(x) = 1$, podemos construir os gráficos destas duas funções no mesmo eixo cartesiano e localizar o ponto x onde as curvas se interceptam. Desta forma, este ponto é caracterizado como o zero da função h.

Veja o gráfico:



EXERCÍCIOS

Determine um intervalo de amplitude 1, que contenha os zeros da funções dadas:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1$$

$$f(x) = \frac{lnx}{1 - 2x} - 2$$

$$f(x) = x^2 e^x - 2$$

Utilizando o método da Tabela e o método gráfico.