Cálculo Numérico
Aula 2

Fabricação – 2 sem

Prof Luis Carlos

Fase 2 - refinamento

Na fase anterior, obtivemos uma aproximação inicial (um chute) , para o zero da função.

Agora vamos refinar esta aproximação por meio de um processo iterativo até a precisão desejada.

A forma como se efetua o refinamento é o que diferencia os métodos numéricos.

Definição: Um método iterativo consiste em uma sequencia de instruções que são executadas passo a passo, sendo que algumas delas são repetidas em ciclos. A execução de um ciclo é denominada de iteração.

Nota: os métodos iterativos fornecem apenas uma aproximação para a solução exata dos zeros de função

Método da bissecção (ou dicotomia)

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Por simplificação, vamos supor que a função f possui um único zero no intervalo $[a, b]$.

O objetivo deste método é reduzir o tamanho do intervalo inicial, $[a, b]$, até que a distância entre a e b seja suficientemente pequena.

Para isto, este método utiliza a divisão sucessiva de $[a, b]$ ao meio.

Esquematicamente, acha-se o ponto médio $c = \frac{(a+b)}{2}$. Calcula-se $f(c)$.

Se $f(c) = 0$, teremos chegado ao zero da função.

Se $f(c) \cdot f(a) < 0$, o zero da função estará entre a e c,
caso contrário estará entre c e b.

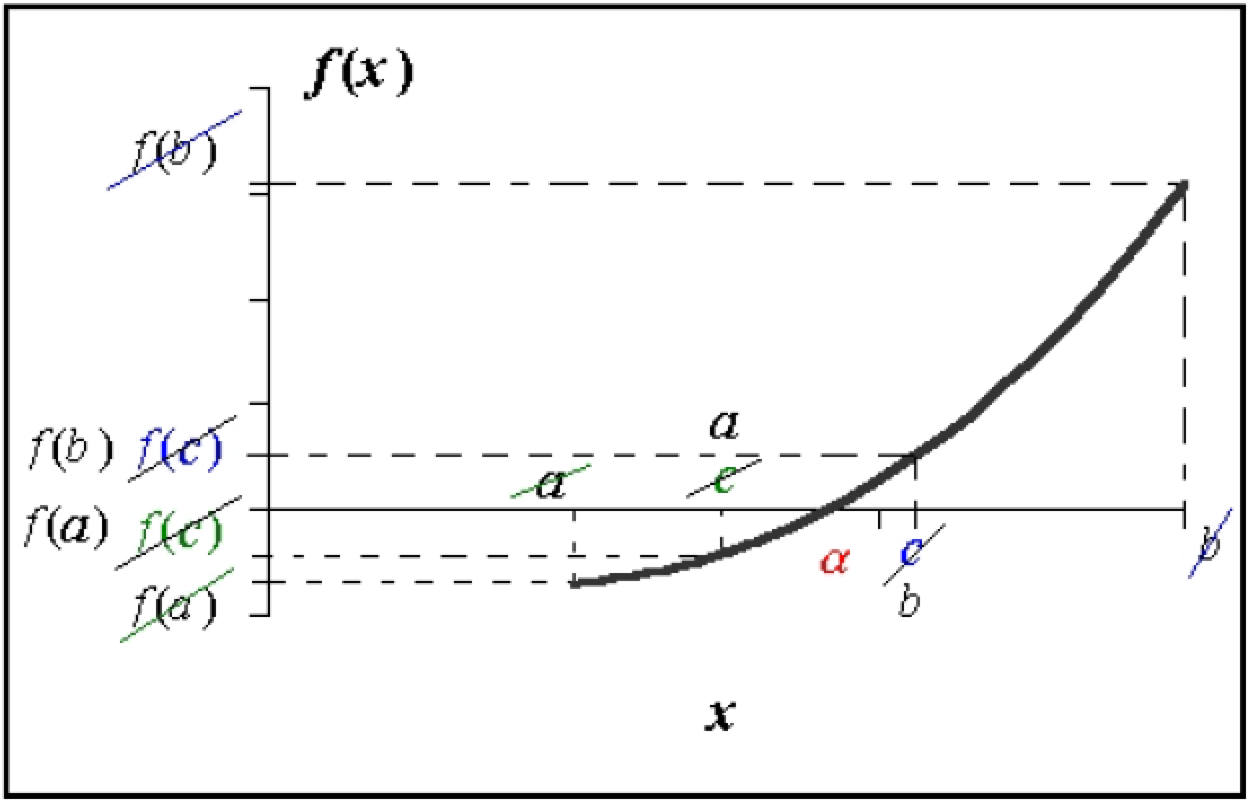
No primeiro caso o zero estará no intervalo (a, c).
Dando a b o valor de c, isto é, alterando o
valor de b, o zero estará no novo intervalo (a, b).

Na segunda hipótese, o zero estará no intervalo (c, b).
Dando a a o valor de c, isto é, alterando
o valor de a, o zero estará no novo intervalo (a, b).

Em qualquer caso, depois da nova iteração, o zero estará no novo intervalo $(a, b$
com amplitude a metade da anterior, diminuindo, portanto,
a margem de erro pela metade.

Este método será repetido até que $|a - b| < \varepsilon$, isto é,
até que a distância entre os extremos
do intervalo seja suficientemente pequena.

Abaixo. Segue interpretação geométrica do método:



f(x)
f(b)
f(b) f(c)
f(a) f(c)
f(a)
a
a
c
α
c
b
b
x

Algoritmo

1 Dados f(x) , a e b, tais que $f(a)f(b) < 0$ e ε uma precisão.

2 Faça $x = \frac{a+b}{2}$

3 Enquanto $|f(x)| > \varepsilon$, faça

início

    Se $f(a)f(x) < 0$, então

        $b = x$

    senão

        $a = x$

    $x = \frac{a+b}{2}$

fim

4 Escreva ($\bar{x} = \frac{a+b}{2}$)

Determinar o zero da função $f(x) = x\ln(x) - 1$, pelo método da bissecção com $\varepsilon = 10^{-2}$.

Vimos anteriormente (**Exemplo 2.6**) que esta função possui um único zero pertencente ao intervalo $[1, 2]$. Logo, $a = 1$ e $b = 2$.

a	$f(a)$	b	$f(b)$	c	$f(c)$	$\lvert a-b\rvert < \varepsilon$	Situação
1	−	2	+	1.5	−	$1 >> 10^{-2}$	$a \leftarrow c$ $f(a) \leftarrow f(c)$
1.5	−	2	+	1.75	−	$0.5 > 10^{-2}$	$a \leftarrow c$ $f(a) \leftarrow f(c)$
1.75	−	2	+	1.8750	+	$0.25 > 10^{-2}$	$b \leftarrow c$ $f(b) \leftarrow f(c)$
1.75	−	1.8750	+	1.8125	+	$0.125 > 10^{-2}$	$b \leftarrow c$ $f(b) \leftarrow f(c)$
1.75	−	1.8125	+	1.78125	+	$0.0625 > 10^{-2}$	$b \leftarrow c$ $f(b) \leftarrow f(c)$
1.75	−	1.78125	+	1.765625	+	$0.03125 > 10^{-2}$	$b \leftarrow c$ $f(b) \leftarrow f(c)$
1.75	−	1.765625	+	1.757813	−	$0.015625 > 10^{-2}$	$a \leftarrow c$ $f(a) \leftarrow f(c)$
1.757813	−	1.765625	+	1.761719	−	$0.0078125 < 10^{-2}$	$c \leftarrow 1.761719$

Convergência:

O Método da Bissecção converge sempre que a função $f(x)$ for contínua no intervalo [a,b] e $f(a)f(b) < 0$.

Entretanto, a convergência do Método da Bissecção é muito lenta, pois se o intervalo inicial é tal que $(b_0 - a_0) >> \varepsilon$ e se ε for muito pequeno, o número de iterações tende a ser muito grande.

Estimativa do Número de Iterações:

Dada uma precisão ε e um intervalo inicial [a,b], é possível saber quantas iterações serão efetuadas pelo método até que obtenha $b - a < \varepsilon$, com $b > a$.

Estimativa para o número de iterações:

$$k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Deve-se então obter k tal que $b_k - a_k < \varepsilon, \varepsilon \neq 0$.

Observações:

- O método converge sempre e pode ser aplicado para obter a raiz de qualquer equação;
- As iterações não envolvem cálculos trabalhosos;

Exercícios

Utilizando o Método da Bissecção, resolva a equação

a) $x^2+\ln(x) = 0$, com $\varepsilon = 0.01$.

b) $x^3 - \text{sen}(x) = 0$, com $\varepsilon = 0.001$.