Aula 7 – Equação Vetorial da Reta e Equação Vetorial do plano

Prof Luis Carlos

As retas podem estar posicionadas em planos (R^2) ou no espaço (R^3). Retas no plano possuem pontos com duas coordenadas, (x,y). Exemplo: A(2,1) e B(-3, 5)

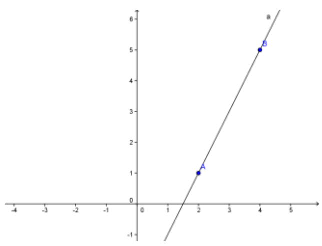
As retas no espaço possuem pontos com três coordenadas, (x, y, z). Exemplo: A(1, -2, 3) e B(4,5,6).

Equação da Reta no plano

Vamos recordar a equação da reta que passa por dois pontos que você aprendeu no ensino médio:

"Escreva a equação da reta que passa pelos pontos A(2,1) e B(4, 5)".

Veja, abaixo, um esboço de como fica graficamente o problema:



Para escrever a equação geral desta reta utilizamos a equação canônica:

$y - y_0 = m(x - x_0)$, onde: y_0 é a coordenada y de um dos pontos, x_0 é a coordenada x deste ponto e m é o coeficiente angular da reta, isto é

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_f - y_i}{x_f - x_i}$$

Assim, $m = \frac{5-1}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$ e y – 1 = 2 (x – 2) , que resulta em y = 2x – 3

Equação Vetorial da Reta no Espaço

Uma reta pode ser determinada por meio de dois de seus pontos conhecidos ou por meio de um de seus pontos e sua inclinação.

Considere o ponto A(x_1, y_1, z_1) e o vetor $\vec{v} = (a, b, c)$, não nulo. Sabemos que só existe uma **reta r** que passa pelo ponto A e tem direção do vetor $\vec{v}$. Para tal, um ponto P(x, y, z) qualquer pertencente à reta **r** se , e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$, ou seja,

$\overrightarrow{AP} = t\,\vec{v}$, para qualquer t pertencente a **r**.

Como $\overrightarrow{AP} = t\,\vec{v}$ pode ser escrito como $P - A = t\,\vec{v}$, então temos que:

$$P = A + t\,\vec{v}$$

Substituindo os pontos e o vetor da expressão pelas coordenadas dadas, temos:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

que é chamada equação vetorial da reta. O vetor $\vec{v}$ é chamado vetor diretor da reta e t é o parâmetro (variável) da equação.

Exemplo

A reta r que passa por A(1, -1, 4) e tem a direção de $\vec{v}$ = (2, 3, 2), tem equação vetorial

r: (x, y, z) = (1, -1, 4) + t(2, 3, 2)

onde (x, y, z) representa um ponto qualquer de r.

Se quisermos obter as coordenadas de diversos pontos da reta r, basta atribuir números reais para o parâmetro t:

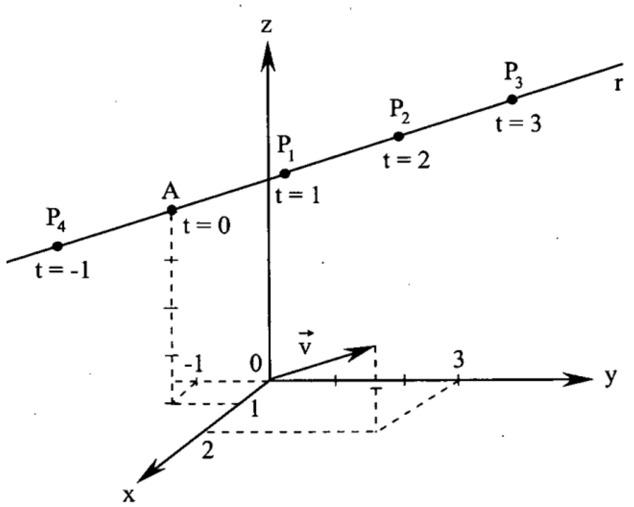
para t = 2, obtém-se (x, y, z) = (1, -1, 4) + 2(2, 3, 2) = (5, 5, 8)
e, portanto, P_2 (5, 5, 8) ∈ r;

para t = 3, obtém-se o ponto P_3 (7, 8, 10);

para t = 0, obtém-se o próprio ponto A(1, -1, 4);

para t = -1, obtém-se o ponto P_4 (-1, -4, 2);

A figura abaixo mostra graficamente os pontos obtidos:



Equações paramétricas da Reta

As equações paramétricas da reta são úteis quando precisamos determinar as coordenadas de um ponto de uma reta r, do qual se sabe uma de suas coordenadas. Assim, as outras duas dependem da coordenada conhecida.

Tomamos a equação vetorial de uma reta qualquer:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

Realizamos as operações indicadas no lado direito da equação:

$$(x, y, z) = (x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$$

Pela condição de igualdade entre pontos e vetores, temos:

$$\begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \quad com\ t \in R \\ z = z_1 + tc \end{cases}$$

que são as equações paramétricas de uma reta r qualquer.

Exemplo1:

Dado o ponto A(2, 3, -4) e o vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$, pede-se:

a) Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{v}$.
b) Encontrar os dois pontos B e C de r de parâmetros t = 1 e t = 4, respectivamente.
c) Determinar o ponto de r cuja abscissa é 4.
d) Verificar se os pontos D(4, -1, 2) e E(5, -4, 3) pertencem a r.
e) Determinar para que valores de m e n o ponto F(m, 5, n) pertence a r.

Solução:

a) De acordo com (5) temos imediatamente:

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$$

b) Das equações acima tem-se:

para t = 1 vem $\begin{cases} x = 2 + (1) = 3 \\ y = 3 - 2(1) = 1 \\ z = -4 + 3(1) = -1 \end{cases}$ $\therefore$ $B(3, 1, -1) \in r$

para t = 4 vem $\begin{cases} x = 2 + (4) = 6 \\ y = 3 - 2(4) = -5 \\ z = -4 + 3(4) = 8 \end{cases}$ $\therefore$ $C(6, -5, 8) \in r$

c) Como o ponto tem abscissa 4 (x = 4), temos

$4 = 2 + t$ (1° equação de r) e, portanto, t = 2.

Como

$$t = 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 - 2(2) = -1 \\ z = -4 + 3(2) = 2, \end{cases}$$

o ponto procurado é (4, -1, 2).

d) Um ponto pertence à reta r se existe um real t que satisfaz as equações de r.

Para D(4, -1, 2) as equações

$$\begin{cases} 4 = 2 + t \\ -1 = 3 - 2t \\ 2 = -4 + 3t \end{cases}$$

se verificam para t = 2 e, portanto, $D \in r$.

Para E(5, -4, -3) as equações

$$\begin{cases} 5 = 2 + t \\ -4 = 3 - 2t \\ -3 = -4 + 3t \end{cases}$$

não são satisfeitas para o mesmo valor de t (t = 3 satisfaz a primeira equação mas não as duas outras). Logo, E $\notin$ r.

e) Como F $\in$ r, as equações

$$\begin{cases} m = 2 + t \\ 5 = 3 - 2t \\ n = -4 + 3t \end{cases}$$ se verificam para algum real t.

Da equação 5 = 3 - 2t, vem t = -1 e, portanto,

m = 2 + (-1) = 1

n = -4 + 3(-1) = -7

Exemplo2:

Escrever equações paramétricas da reta r que passa por A(3, -1, -2) e B(1, 2, 4).

Solução

Escolhendo o ponto A e o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 3, 6)$, tem-se

$$r: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$$

Equações reduzidas

A partir das equações paramétricas podemos dar outra representação às equações da reta, isolando o parâmetro t de uma das equações e substituindo o valor de **t** nas outras duas equações.

Para facilitar a compreensão vamos utilizar um caso particular.

Seja a reta r que passa pelo ponto A(2, -4, -3) e tem direção do vetor $\vec{v} = (1, 2, -3)$. Escreva as equações reduzidas da reta r.

Vamos primeiro obter as equações paramétricas:

$$r: \begin{cases} x = 2 + 1t \\ y = -4 + 2t \\ z = -3 - 3t \end{cases}$$

Isolamos t na primeira equação: $t = x - 2$

Substituímos o valor de **t** nas outras duas equações:

$$y = -4 + 2t = -4 + 2(x - 2) = 2x - 8$$

$$z = -3 - 3t = -3 - 3(x - 2) = -3x - 9$$

Assim, as equações reduzidas ficam:

$$r: \begin{cases} y = 2x - 8 \\ z = -3x - 9 \end{cases}$$

Para determinar as coordenadas de um ponto de r, basta escolher um valor para x. e calcular y e z. Assim, sendo x = -2, temos que y = -12 e z = -3

Exercícios:

1) Determinar uma equação vetorial da reta r definida pelos pontos A(2, -3, 4) e B(1, -1, 2) e verificar se os pontos $C(\frac{5}{2}, -4, 5)$ e D(-1, 3, 4) pertencem a r.
2) Dada a reta r : (x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(2, -3, 0), escrever equações paramétricas de r.
3) Escrever equações paramétricas da reta que passa por A(1, 2, 3) e é paralela à reta r : (x, y, z) = (1, 4, 3) + t(0, 0, 1).
4) Dada a reta

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = -4 + 2t \end{cases}$$

, determinar o ponto de r tal que

   a) a ordenada seja 6;
   b) a abscissa seja igual à ordenada;
   c) a cota seja o quádruplo da abscissa.
5) A reta r passa pelo ponto A(4,-3,-2) e é paralela à reta

$$s: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 4t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

. Se $P(m, n, -5) \in r$, determinar m e n.

6)

Obter equações reduzidas na variável x, da reta

a) que passa por A(4, 0, -3) e tem a direção de $\vec{v} = (2, 4, 5)$;
b) pelos pontos A(1, -2, 3) e B(3, -1, -1);
c) pelos pontos A(-1, 2, 3) e B(2, -1, 3);
d) dada por

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3t \\ z = 4t - 5 \end{cases}$$

Equação vetorial do Plano

Sabemos, da geometria Euclidiana, que para determinar um plano π único precisamos conhecer pelo menos três pontos não colineares do plano. Com esses três pontos, podemos determinar dois vetores paralelos ao plano π , que darão a direção do plano π , no espaço.

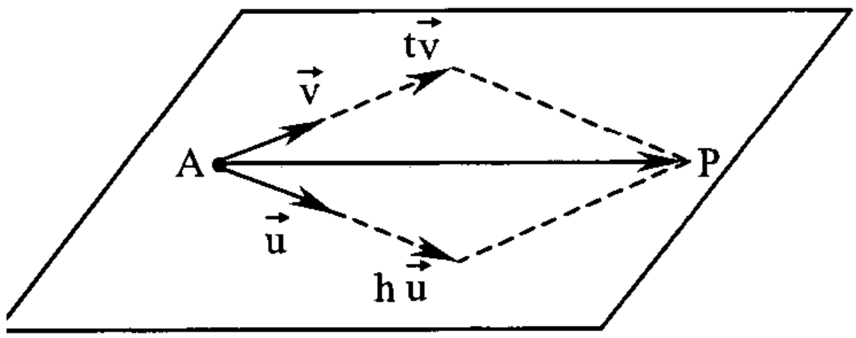
Vamos tomar um dos pontos em questão, por exemplo A(x_0, y_0, z_0) , e dois vetores quaisquer, por exemplo, $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, paralelos ao plano π no espaço.

Para que um ponto P(x, y, z) qualquer, pertença ao plano π , é preciso que existam dois números reais h e t, tais que:

$$\overrightarrow{AP} = \mathrm{h}\ \vec{u} + \ t\,\vec{v}$$

Ou ainda,

$$P = A + \mathrm{h}\ \vec{u} + \ t\,\vec{v}$$



Substituindo as coordenadas conhecidas na Expressão acima, temos:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \mathrm{h}\ (a_1, b_1, c_1) + \ t\ (a_2, b_2, c_2)$$

que é a equação vetorial do plano. Os vetores $\vec{u}$; $\vec{v}$ são chamados vetores diretores do plano.

Equações paramétricas do Plano

Da mesma forma que fizemos com as equações da reta, também podemos efetuar as operações indicadas na expressão acima e dar uma nova forma à equação vetorial do plano:

$$(x,y,z) = (x_0 + \mathrm{h}\ a_1 + t\, a_2 , y_0 + \mathrm{h}\, b_1 + t\, b_2 , z_0 + \mathrm{h}\, c_1 + t\, c_2)$$

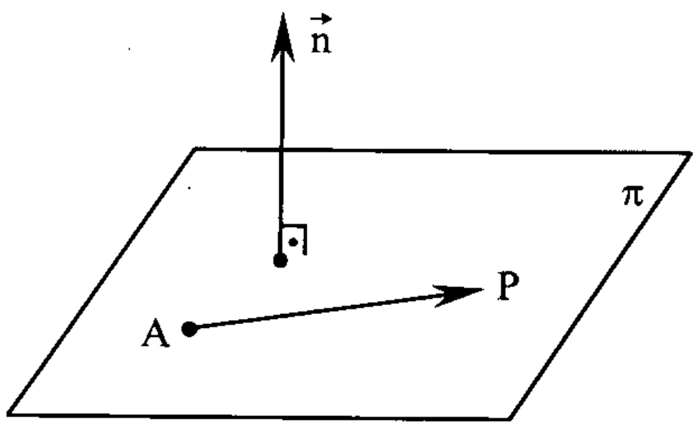
Pela condição de igualdade entre pontos e vetores, temos:

$$\begin{cases} x = x_0 + \mathrm{h}\, a_1 + t\, a_2 \\ y = y_0 + \mathrm{h}\, b_1 + t\, b_2 \quad com\, k, t \in R \\ z = z_0 + \mathrm{h}\, c_1 + t\, c_2 \end{cases}$$

que são as equações paramétricas de um plano qualquer.

Equação geral do plano

Seja A(x_1, y_1, z_1) um ponto do espaço, e $\vec{n} = (a,b,c)$ o vetor normal (ortogonal) ao plano π no espaço, conforme figura a seguir:



Para que um ponto P(x, y, z) pertença ao plano é necessário que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{n}$ sejam ortogonais, ou seja,

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

Ou ainda,

$$(a, b, c) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

Ou

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

Aplicando a propriedade distributiva na igualdade acima, temos:

$$ax + by + cz - a\,x_1 - b\,y_1 - c\,z_1 = 0$$

Fazendo $-ax_1 - by_1 - cz_1 = d$, pois são todos números reais, obtemos um único número que é o d. Substituindo d na equação acima, temos:

$$ax + by + cz + d = 0$$

que é a equação geral do plano π, que passa pelo ponto A e é ortogonal ao vetor $\vec{n}$.

Exemplos:

1) Seja o plano π que passa pelo ponto A(2, 2, -1) e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 5, -3)$. Obter uma equação vetorial, um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

Solução

a) *Equação vetorial*: (x, y, z) = (2, 2, -1) + h(2, -3, 1) + t(-1, 5, -3)

b) *Equações paramétricas:*

$$\begin{cases} x = 2 + 2h - t \\ y = 2 - 3h + 5t \\ z = -1 + h - 3t \end{cases}$$

Obs: Se quisermos obter as coordenadas de pontos pertencentes ao plano acima, basta atribuir valores aos parâmetros h e t .

Por exemplo, para h = 0 e t = 1, vem

x = 1 , y = 7 e z = -4

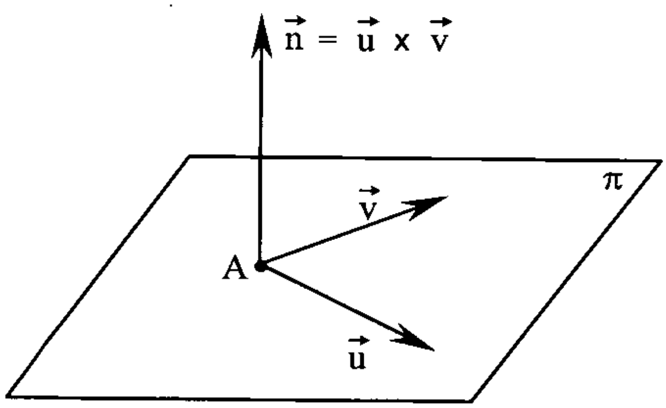
e, portanto, B(1, 7, -4) é um ponto do plano π.

c) *Equação geral:*

Como o vetor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = (4, 5, 7)$$

é simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u}$; $\vec{v}$, então também é ortogonal ao plano paralelo a esses vetores. Desta forma $\vec{u} \times \vec{v}$, é um vetor ortogonal ao plano, conforme pode ser visto na figura:



Então a equação geral do plano é da forma 4 x + 5 y + 7 z + d = 0. Esta é a equação de todos os planos paralelos, perpendiculares ao vetor:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (4,5,7)$$

Para determinar a equação do plano em questão, precisamos determinar o valor de d, que é obtido, substituindo as coordenadas do ponto A na equação:

$$d = -ax_1 - by_1 - cz_1 = -(4x2) -(5x2) -(7x-1) = -11$$

Assim, a equação do plano π é: **4 x + 5 y + 7 z – 11 = 0**

EXERCÍCIOS

1)

Dado o plano π determinado pelos pontos A(1, -1, 2), B(2, 1, -3) e C(-1, -2, 6), obter um sistema de equações paramétricas e uma equação geral de π.

2)

Dado o plano π de equação 2x - y - z + 4 = 0, determinar um sistema de equações paramétricas de π.

3)

Determinar uma equação geral do plano π que contenha as retas

$$r_1: \begin{cases} y = x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 3 \\ z = -6t + 1 \end{cases}$$