Aula 6 - Produto Misto

O produto misto é o resultado do cálculo do produto escalar entre um vetor dado e outro vetor resultante do produto vetorial entre outros dois vetores, ou seja, tomados três vetores $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ **,** $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ **e** $\vec{w} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$ **,** então o produto misto é o produto $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$ **,** que denotamos por $[\,\vec{u},\ \vec{v}, \vec{w}\,]$ **.**

Já sabemos que o produto vetorial $\vec{v} \times \vec{w}$ é calculado, como segue:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

e resulta em um outro vetor.

Desta forma, o produto escalar entre $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ vai resultar em um número real que é calculado com segue:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Utilizando a notação de cálculo de determinante de Laplace, o produto acima, chamado de “ Produto Misto ”, pode ser calculado, conforme a seguir:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Assim, o resultado do produto misto será um número real.

Exemplo

Calcular o produto misto dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Solução

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

Propriedades do Produto Misto

As propriedades do produto misto decorrem, em sua maioria, das propriedades dos determinantes.

I) O produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ muda de sinal ao trocarmos a posição de dois vetores.

Em relação ao exemplo anterior onde $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 27$, teríamos

$(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -27$ (permuta de $\vec{u}$ e $\vec{v}$)

$(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -27$ (permuta de $\vec{u}$ e $\vec{w}$)

$(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -27$ (permuta de $\vec{v}$ e $\vec{w}$)

Se em qualquer um destes três últimos produtos efetuarmos nova permutação de dois vetores, o produto misto resultante volta a ser 27.

É o que acontece com $(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = 27$, onde no primeiro deles permutamos $\vec{u}$ e $\vec{w}$.

Então, se em relação ao produto misto $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ocorrer

a) uma permutação – haverá troca de sinal;

b) duas permutações – não altera o valor.

Resulta desta propriedade que os sinais **.** e **x** podem ser permutados, isto é,

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}}$$

pois

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

II) $(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{x}, \vec{v}, \vec{w})$

$(\vec{u}, \vec{v} + \vec{x}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{x}, \vec{w})$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{x}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{x})$

III) $(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \alpha\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

IV) $\boxed{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0 \text{ se, e somente se, os três vetores forem coplanares.}}$

Admitindo-se que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, ou seja, $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$, conclui-se que $(\vec{v} \times \vec{w}) \perp \vec{u}$. Por outro lado, no estudo do produto vetorial vimos que o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$ é também ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Assim sendo, como $\vec{v} \times \vec{w}$ é ortogonal aos três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, estes são coplanares (Figura 4.1).

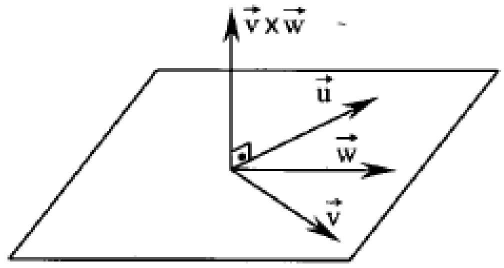


Figura 4.1

Reciprocamente, admitindo-se que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares, o vetor $\vec{v} \times \vec{w}$, por ser ortogonal a $\vec{v}$ e $\vec{w}$, é também ortogonal a $\vec{u}$. Ora, se $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ são ortogonais, o produto escalar deles é igual a zero, isto é,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

Exemplos

1) Verificar se são coplanares os vetores $\vec{u} = (2, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, -1)$ e $\vec{w} = (2, -1, 4)$.

Solução

Como

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

os vetores não são coplanares.

2) Qual deve ser o valor de m para que os vetores $\vec{u} = (2, m, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e $\vec{w} = (-1, 3, -1)$ sejam coplanares?

Solução

Para que $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam coplanares deve-se ter

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$$

isto é,

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$2 - 2m - 12 + m = 0$$

e, portanto,

$$m = -10$$

3) Verificar se os pontos A(1, 2, 4), B(-1, 0, -2), C (0, 2, 2) e D(-2, 1, -3) estão no mesmo plano.

Solução

Os quatro pontos dados são coplanares se forem coplanares os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ (Figura 4.2), e, para tanto, deve-se ter

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$$

Como

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 0,$$

os pontos dados são coplanares.

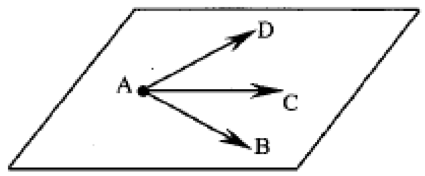
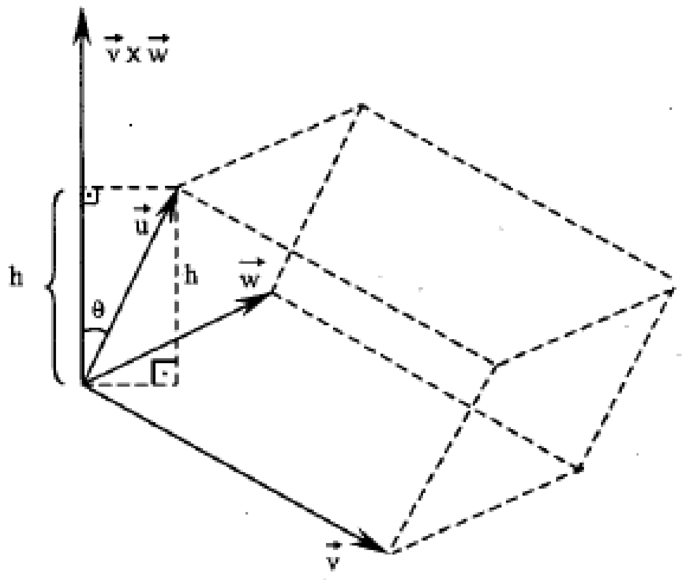


Figura 4.2

Interpretação Geométrica do Produto Misto em módulo

Sabemos que o valor do produto misto é um número real e que dependendo das coordenadas dos vetores envolvidos, esse número resultante pode ser um número negativo.

Geometricamente, o módulo do resultado do produto misto é equivalente ao volume de um paralelepípedo cujas arestas são formadas pelos três vetores envolvidos neste produto misto, conforme figura abaixo:



Na figura acima, a área do paralelepípedo, formada pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, é determinada pela norma do produto vetorial entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$, isto é, $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$.

Temos também na figura que o ângulo θ é formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v} \times \vec{w}$ e este forma um ângulo de 90º com a base do paralelepípedo. Desta forma, a altura h é igual ao produto entre o comprimento do vetor $\vec{u}$ e o módulo do cosseno do ângulo θ, ou seja, $h = \|\vec{u}\| \cdot |cos\ \theta|$

Desta forma, o volume V do paralelepípedo é igual à área da base vezes a sua altura, assim:

$$V = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot |cos\ \theta|$$

Sabemos que o produto escalar também é calculado como segue:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot cos\ \theta$$

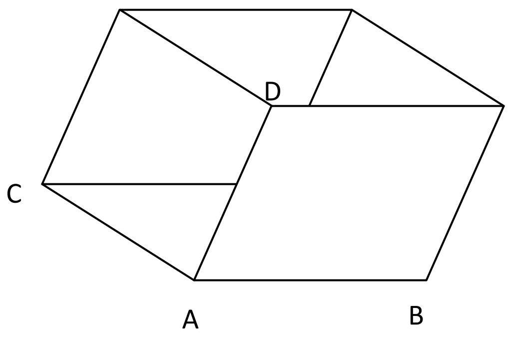
Desta maneira, o volume V será: $V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$, que é na verdade o módulo do produto misto entre os vetores que formam o paralelepípedo.

Assim, o volume do paralelepípedo é:

$$V = |\ [\vec{u}\ , \quad \vec{v}\ , \quad \vec{w}\ ]|$$

Exemplos:

1) Um paralelepípedo é formado pelo vértice A(1, -2, 3) e pelos três outros vértices adjacentes, B(2, -1, -4) , C(0, 2, 0) e D(-1, 2 1). Calcule o volume deste paralelepípedo, conforme figura:



Resposta:

Este paralelepípedo é formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$, então

$$V = \left|\ [\overrightarrow{AB}\ , \overrightarrow{AC}\ , \overrightarrow{AD}\ ]\right|$$

Como:

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -7)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 4, -3)$ e $\overrightarrow{AD} = (-2, 4, -2)$, e
$V = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right|$, então:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -20$$

$$V = |-20|$$

2)

Sejam os vetores $\vec{u} = (3, m, -2)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ e $\vec{w} = (2, -1, 2)$. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 16 u.v. (unidades de volume).

Solução

O volume do paralelepípedo é dado por

$$V = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

e, no caso presente, deve-se ter

$$|(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = 16$$

Sendo

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & m & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2m - 8$$

Como o volume é igual a 16, então:

$$|-2m - 8| = 16,$$

que, pela definição de módulo, implica duas hipóteses:

$$-2m - 8 = 16 \quad \text{ou} \quad -2m - 8 = -16$$

e, portanto,

$$m = -12 \quad \text{ou} \quad m = 4$$

3)

Volume do Tetraedro

Sejam A, B, C e D pontos não-coplanares. Portanto, os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ também são não-coplanares. Em conseqüência, estes vetores determinam um paralelepípedo (Figura 4.4) cujo volume é

$$V = |(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|.$$

Este paralelepípedo, por sua vez, pode ser repartido em dois prismas triangulares de mesmo tamanho (conforme figura) e, portanto, o volume V_p de cada prisma é a metade do volume V do paralelepípedo ($V_p = \frac{1}{2}V$).

Por outro lado, da Geometria Espacial sabemos que o prisma pode ser repartido em três pirâmides de mesmo volume, sendo uma delas o tetraedro ABCD. Assim, o volume V_t do tetraedro é um terço do volume do prisma, isto é,

$$V_t = \frac{1}{3}V_p = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}V)$$

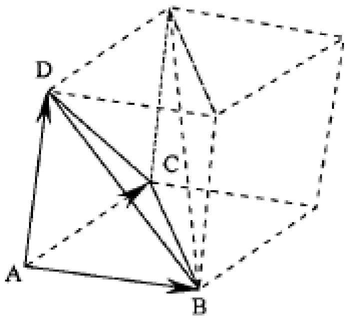


Figura 4.4

ou

$$V_t = \frac{1}{6}V$$

ou

$$\boxed{V_t = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|}$$

Exemplo

Sejam A(1, 2, -1), B(5, 0, 1), C(2, -1, 1) e D(6, 1, -3) vértices de um tetraedro. Calcular

a) o volume deste tetraedro;

b) a altura do tetraedro relativa ao vértice D.

Solução

a) O volume do tetraedro é dado por

$$V_t = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$$

Mas

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 36$$

Portanto, o volume do tetraedro é

$$V_t = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6 \text{ u.v.}$$

b) Observemos na Figura 4.4 que a altura do tetraedro traçada do vértice D é a própria altura do paralelepípedo de base determinada por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Como o volume V do paralelepípedo é dado por

$$\begin{aligned} V &= (\text{área da base})\,(\text{altura}) \\ &= |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| \cdot h \end{aligned}$$

tem-se

$$h = \frac{V}{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}$$

Mas,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (2, -6, -10)$$

e, portanto,

$$h = \frac{36}{|(2, -6, -10)|} = \frac{36}{\sqrt{4+36+100}} = \frac{36}{\sqrt{140}} = \frac{18}{\sqrt{35}} \text{ u.c.}$$