AULA 3

Vetores no Espaço (IR^3): tratamento algébrico e representação gráfica

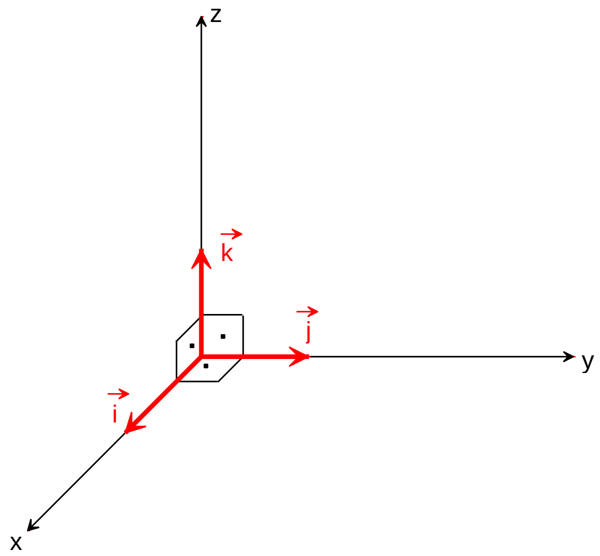
Vetores no espaço (IR^3):

Todo o estudo realizado com vetores no plano **(IR^2)** vale de forma análoga no espaço **(IR^3)**, considerando-se algumas adequações necessárias.

Base canônica:

Trata-se do conjunto $\left\{ \vec{i} \ , \ \vec{j} \ , \ \vec{k} \right\}$, cujos vetores tem coordenadas de origem em (0, 0, 0) e extremidades em $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ e estes vetores dão orientação ao conhecido sistema cartesiano ortogonal Oxyz.

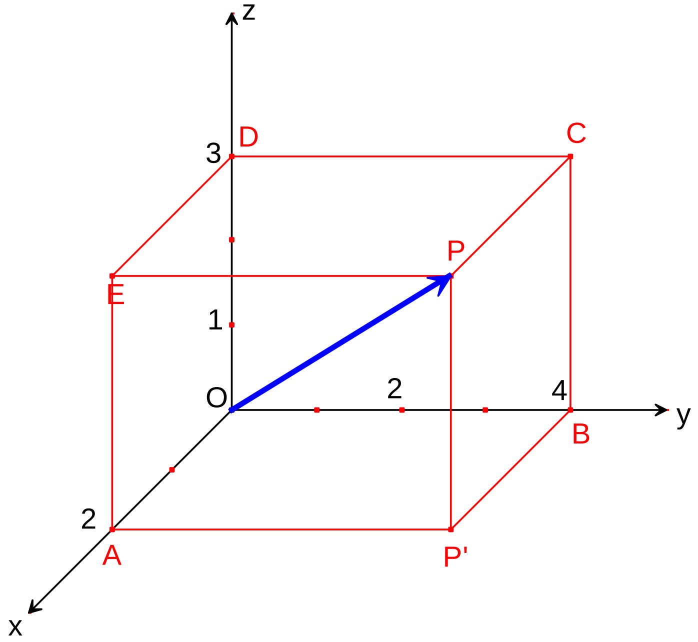
Os eixos do sistema cartesiano do espaço são denominados: OX: eixo das abscissas, OY: eixo das ordenadas e OZ: eixo das cotas, conforme abaixo:



Desta maneira, um vetor no espaço é uma tripla ordenada (x , y , z) de números reais.

Exemplo:

1) $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ implica em escrever $\vec{v} = (\ 2,\ \ 4,\ \ 3\ )$



P': projeção de P no plano xOy

P'(2 , 4 , 0)

C: projeção de P no plano yOz

C(0 , 4 , 3)

E: projeção de P no plano xOz

E(2 , 0 , 3)

A: projeção de P em x

A(2 , 0 , 0)

B: projeção de P em y

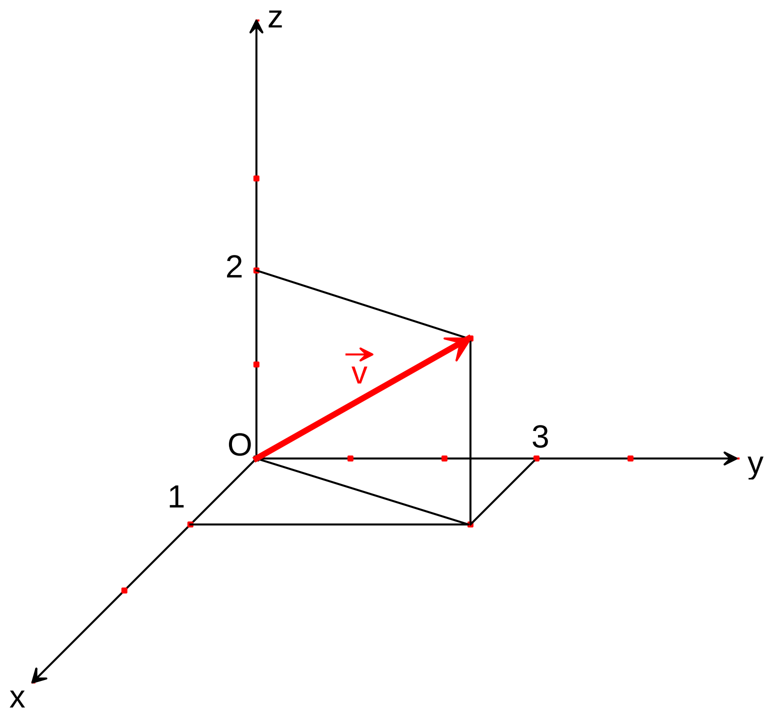
B(0 , 4 , 0)

D: projeção de P em z

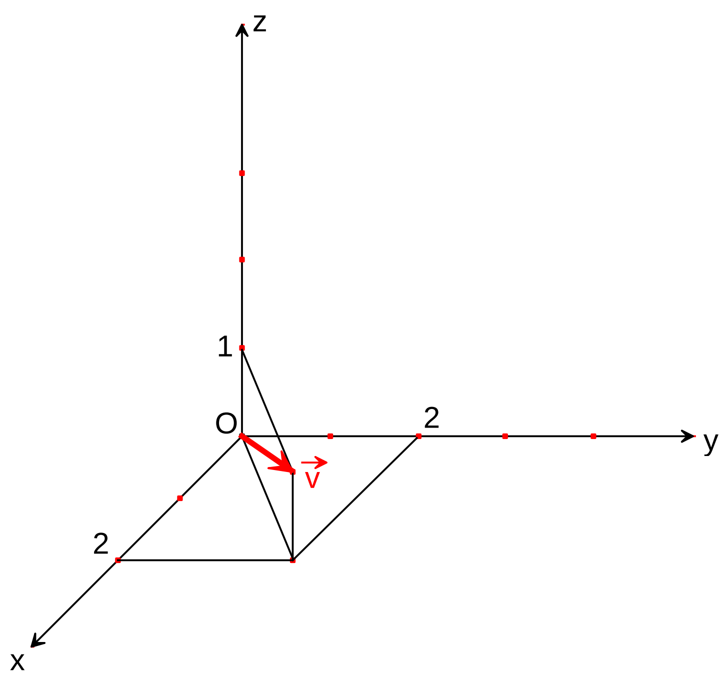
D(0 , 0 , 3)

Para desenhar um vetor no IR^3, não é necessário traçar todos os segmentos que traçamos no exemplo acima. Veja outros exemplos:

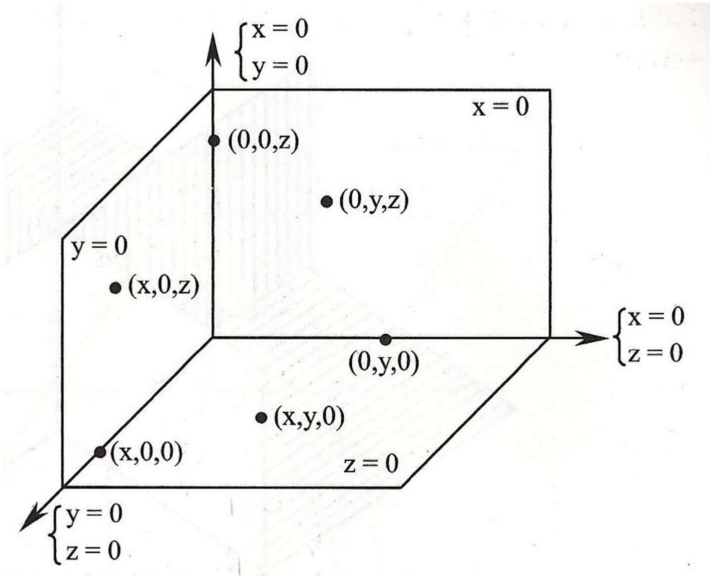
2) $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ ou $\vec{v} = (1,\ 3,\ 2)$



3) $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ou $\vec{v} = (2,\ 2,\ 1)$



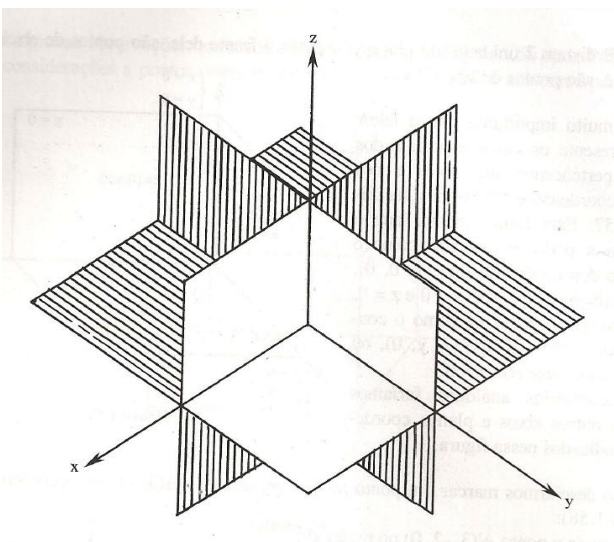
Pontos particulares no espaço



Conforme o gráfico acima, podemos concluir que pontos posicionados nos eixos cartesianos têm duas de suas coordenadas iguais a zero. A coordenada não nula é aquela do eixo onde o ponto está fixado.

Já os pontos que estão posicionados nos planos coordenados, tem uma de suas coordenadas nula. A coordenada nula é aquela cujo eixo não faz parte do plano coordenado.

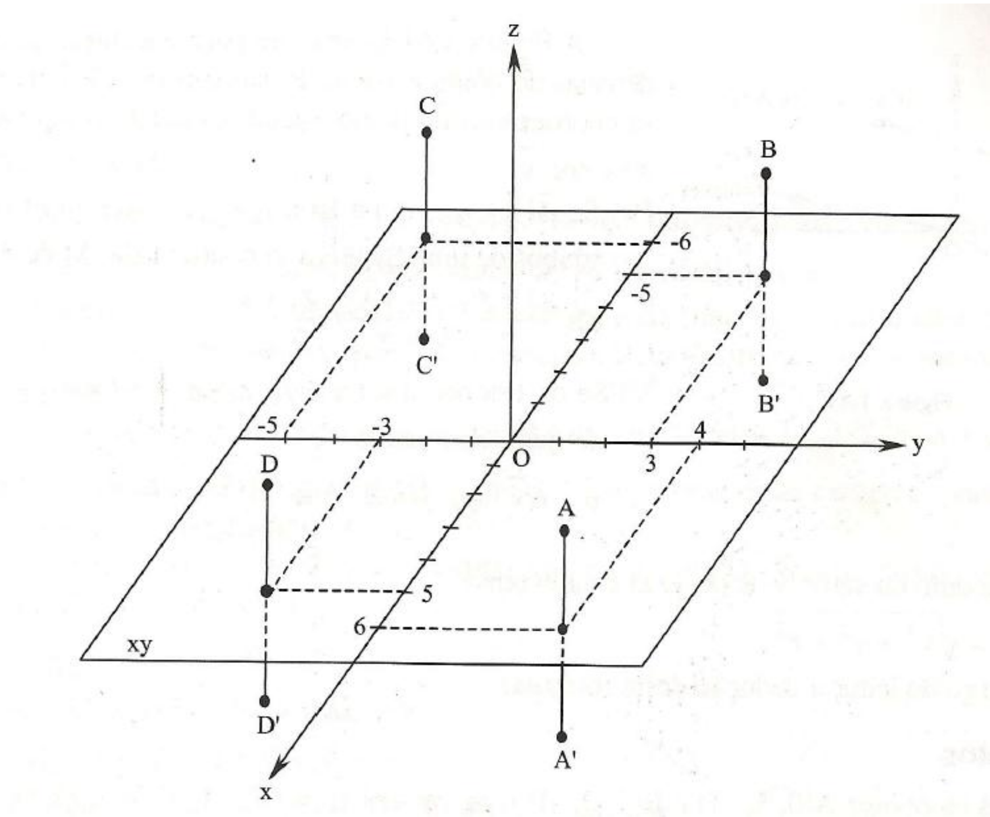
No Plano cartesiano XOY , o plano é dividido em 4 sub-planos, chamados quadrantes, por meio dos eixos OX e OY. No Espaço Cartesiano OXYZ, o espaço está dividido em 08 sub-espaços, chamados octantes, por meio dos planos cartesianos XOY, XOZ e YOZ, conforme figura abaixo:



Além disso, abaixo segue as coordenadas dos pontos A, B, C, D, que estão situados acima do plano XOY, e com cota igual a 2, isto é, a coordenada z é 2 e é positiva. Já os pontos A’ , B’ , C’, e D’ estão abaixo do plano XOY e tem cota -2 (negativa). Analise a figura abaixo:

ponto A(6, 4, 2), situado no 1º octante
ponto B(-5, 3, 2), situado no 2º octante
ponto C(-6, -5, 2), situado no 3º octante
ponto D(5, -3, 2), situado no 4º octante
ponto A'(6, 4, -2), situado no 5º octante
ponto B'(-5, 3, -2), situado no 6º octante
ponto C'(-6, -5, -2), situado no 7º octante
ponto D'(5, -3, -2), situado no 8º octante

Analise a figura abaixo:



Operações com Vetores no espaço: igualdade, adição, multiplicação por escalar, vetor definido por dois pontos

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (x_1 , y_1 , z_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2 , y_2 , z_2)$ e $\alpha \in$ IR, definimos:

Igualdade de vetores:

$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ se e somente se $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

Operações com vetores:

i) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2 , z_1 + z_2)$

ii) $\alpha \overrightarrow{u} = \alpha(x_1 , y_1 , z_1) = (\alpha x_1 , \alpha y_1 , \alpha z_1)$

iii) $P + \overrightarrow{u} = Q$, que são as coordenadas de um ponto

Vetor definido por dois pontos:

Sendo A(x_1 , y_1 , z_1) a origem de um vetor e B(x_2 , y_2 , z_2) a sua extremidade, e se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, temos:

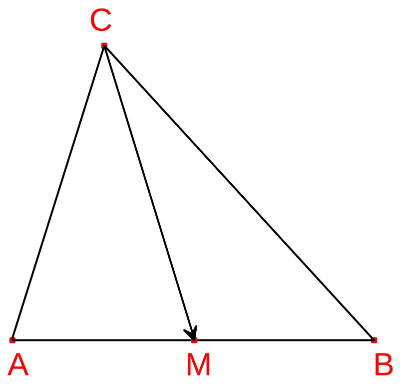
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1 \; , \; y_2 - y_1 \; , z_2 - z_1)$$

Ponto médio:

Seja o segmento de extremos A(x_1 , y_1 , z_1) e B(x_2 , y_2 , z_2). Sendo M(x , y , z) o ponto médio de AB, temos: $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} , \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

Exemplo: Seja o triângulo de vértices A(4 , -1 , -2); B(2 , 5 , -6) e C(1 , -1 , -2). Calcule as coordenadas do vetor que representa a mediana relativa ao lado AB.

Resolução:



A mediana relativa ao lado AB do triângulo pode ser representada pelo vetor $\overrightarrow{CM}$ (ou pelo vetor $\overrightarrow{MC}$), onde M é o ponto médio de AB:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)=\left(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{-2-6}{2}\right)=(3, 2, -4)$$

Logo, $\overrightarrow{CM} = M - C = (3, 2, -4) - (1, -1, -2) = (2, 3, -2)$

Exercícios resolvidos:

1) Dados os pontos A(3 , -4 , -2) e B(-2 , 1 , 0), determinar o ponto N pertencente ao segmento AB tal que $\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Resolução:

$$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$$

$$N - A = \frac{2}{5}(B - A)$$

$$N - (3, -4, -2) = \frac{2}{5}(-5, 5, 2)$$

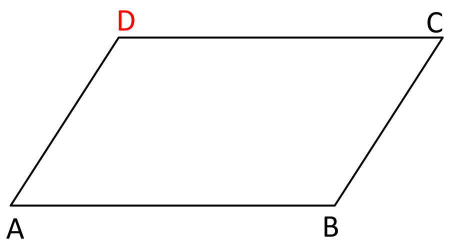
$$N - (3, -4, -2) = \left(-2, 2, \frac{4}{5}\right)$$

$$N = (3, -4, -2) + \left(-2, 2, \frac{4}{5}\right)$$

$$N\left(1, -2, -\frac{6}{5}\right)$$

2) Sendo A(2 , -5 , 3); B(7 , 3 , -1) e C(6 , -1 , 3) vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD, determine o vértice D.

Resolução:



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$): mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento

B – A = C – D

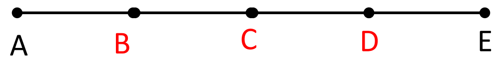
(7 , 3 , -1) – (2 , -5 , 3) = (6 , -1 , 3) – D

D = (6 , -1 , 3) – (7 , 3 , -1) + (2 , -5 , 3)

Logo, D(1 , -9 , 7)

3) Sendo A(-2 , 1 , 3) e B(6 , -7 , 1) extremidades de um segmento, determinar os pontos C, D e E, nesta ordem, que dividem o segmento AB em quatro partes de mesmo comprimento.

Resolução:



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}B - A = \frac{1}{4}(8\,,-8\,,-2) = \left(2\,,-2\,,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(2\,,-2\,,-\frac{1}{2}\right)$$

$$C - A = \left(2\,,-2\,,-\frac{1}{2}\right)$$

$$C = \left(2\,,-2\,,-\frac{1}{2}\right) + (-2\,,1\,,3)$$

$$C\left(0\,,-1\,,\frac{5}{2}\right)$$

$\overrightarrow{CD} = \left(2\,,-2\,,-\frac{1}{2}\right)$

$D - C = \left(2\,,-2\,,-\frac{1}{2}\right)$

$D = \left(2\,,-2\,,-\frac{1}{2}\right) + \left(0\,,-1,\,\frac{5}{2}\right)$

$D(2\,,-3\,,2)$

$\overrightarrow{DE} = \left(2\,,-2\,,-\frac{1}{2}\right)$

$E - D = \left(2\,,-2\,,-\frac{1}{2}\right)$

$E = \left(2\,,-2\,,-\frac{1}{2}\right) + (2\,,-3\,,2)$

$E\left(4\,,-5\,,\frac{3}{2}\right)$

4) Dados os pontos A(0 , 1 , -1) e B(1 , 2 , -1) e os vetores $\vec{u} = (-2, -1,\ 1)$, $\vec{v} = (3,\ 0, -1)$ e $\vec{w} = (-2,\ 2,\ 2)$, verifique se existem números **a**, **b** e **c**, tais que $\vec{w} = a\,\overrightarrow{AB} + \ b\,\vec{u} + c\,\vec{v}$

Resolução:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \ (1\,,2\,,-1) - (0\,,1\,,-1) = (1\,,1,0)$$

$\vec{w} = a\,(1\,,1,0) + \ b\,(-2,-1,1) + c\,(3,0,-1)$ OU AINDA,

$\vec{w} = (\mathrm{a}\,,\mathrm{a},0) + \ (-2b,-1b,b) + (3c,0,-1c)$ OU AINDA,

$(-2,\ 2,\ 2) = (\mathrm{a} - 2b + 3c, \mathrm{a} - b, b - c\ )$

Os dois vetores são iguais somente, quando:

$$\begin{cases} \mathrm{a} - 2b + 3c = -2 \\ \mathrm{a} - b = 2 \\ b - c = 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear acima, temos: a = 3; b = 1 ; e c = -1

Assim, o vetor é $\vec{w} = 3\,\overrightarrow{AB} + \ 1\,\vec{u}\ - 1\,\vec{v}$

Exercícios propostos: