Aula 2: Vetores – tratamento algébrico

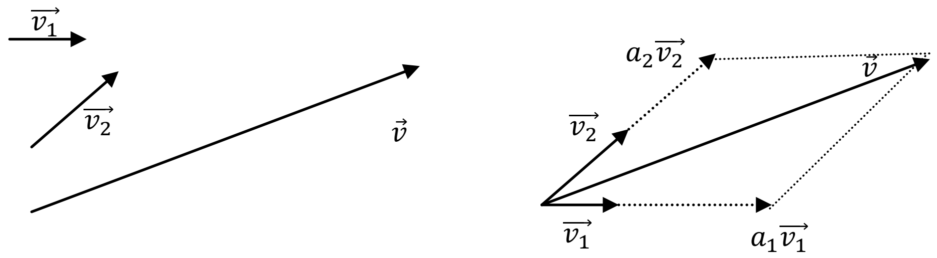
Vetores no R^2 e no R^3

Decomposição de vetores no plano (R^2)

Dados dois vetores $\overrightarrow{v_1}\ e\ \overrightarrow{v_2}$, não colineares, então qualquer vetor $\overrightarrow{v}$ pode ser decomposto nas direções de $\overrightarrow{v_1}\ e\ \overrightarrow{v_2}$. O problema é determinar os dois vetores que tem a direção de $\overrightarrow{v_1}\ e\ \overrightarrow{v_2}$ e cuja soma seja igual a $\overrightarrow{v}$, ou seja, é preciso obter dois números reais a_1 e a_2, de modo que:

$$\vec{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$$

conforme o desenho abaixo:



No desenho acima, dizemos que $\overrightarrow{v}$ é combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1}\ e\ \overrightarrow{v_2}$ por meio dos números reais a_1 e a_2. O conjunto $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$,formado pelos vetores não colineares, $\overrightarrow{v_1}\ e\ \overrightarrow{v_2}$, é chamado de base e os números reais a_1 e a_2 são chamados de coordenadas de $\overrightarrow{v}$ em relação à base $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$.

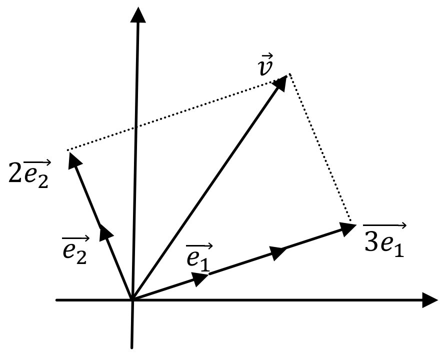
O vetor $a_1\overrightarrow{v_1}$ é a projeção do vetor $\vec{v}$, sobre $\overrightarrow{v_1}$, na direção de $\overrightarrow{v_2}$. De mesma maneira, o vetor $a_2\overrightarrow{v_2}$ é a projeção do vetor $\vec{v}$, sobre $\overrightarrow{v_2}$, na direção de $\overrightarrow{v_1}$, conforme figura acima.

De acordo com o exposto acima, podemos construir infinitas bases. Para facilitar nosso trabalho, são utilizadas comummente as bases ortonormais, que são bases cujos vetores são ortogonais e unitários.

Assim, uma base formada pelos vetores $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ é dita ortonormal se:

$\overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2}$ e $\|\overrightarrow{v_1}\| = \|\overrightarrow{v_2}\| = 1$

Veja um exemplo abaixo, utilizando o plano cartesiano xOy:



Os vetores $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ podem ser representados na figura acima, em função de $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$, como sendo:

$\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}$

$\overrightarrow{m} = -\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2}$

$\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$

$\overrightarrow{x} = -3\overrightarrow{e_1} + 0\overrightarrow{e_2}$

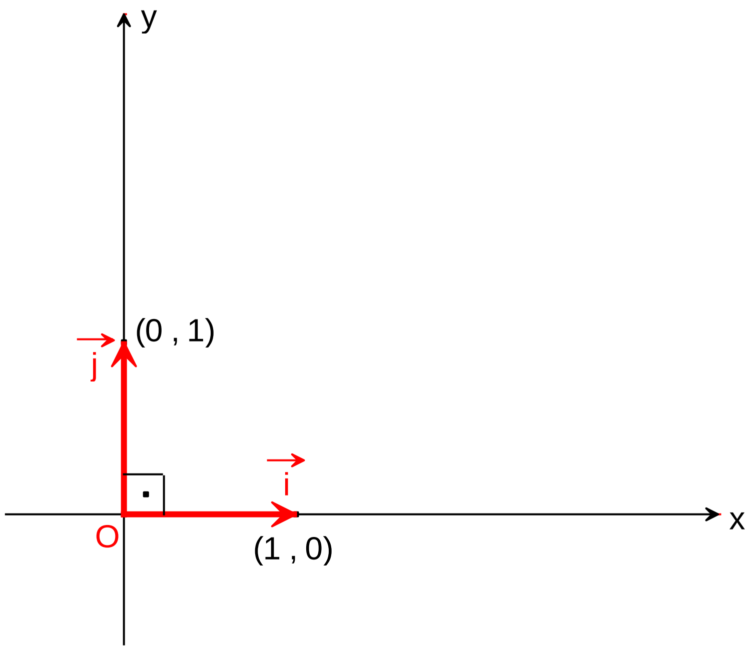
$\overrightarrow{y} = 0\overrightarrow{e_1} - 2\overrightarrow{e_2}$

De modo geral: $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2}$, com $a_1, a_2 \in$ IR.

Dizemos que os vetores $\overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{m}$, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ são expressos em função de $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ ou que são **combinações lineares** da **base** B = $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$.

Base canônica:

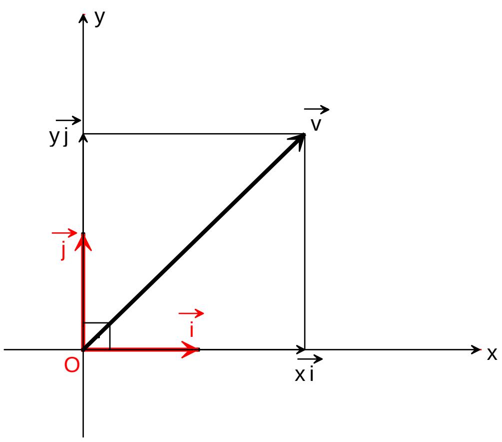
Existem infinitas bases ortonormais no plano cartesiano ortogonal xOy, no entanto uma delas é mais notável. É a base formada pelos vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ cujos representantes tem sua origem no ponto (0,0) e suas extremidades em (1,0) para o vetor $\vec{i}$, e em (0,1) para o vetor $\vec{j}$. O conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ é chamado de base canônica, conforme a figura abaixo:



Esta base também estabelece o conhecido sistema cartesiano ortogonal xOy.

Neste curso, trataremos somente da base canônica. Dessa forma, dado um vetor $\vec{v}$ qualquer, do plano, existe uma só dupla de números reais x e y tal que:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



Expressão analítica do vetor

O vetor $\vec{v}$, representado acima, também pode ser expresso como a seguir:

$$\vec{v} = (x , y):$$

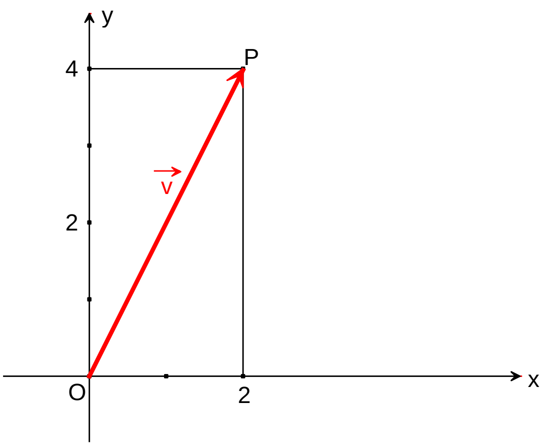
que é a **expressão analítica de** $\vec{v}$

Ou seja, um vetor no plano é um par ordenado (x , y) de números reais, cuja oriegem é o (0,0) e a extremidade, o ponto (x,y) dado.

Exemplo:

$\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$ ou simplesmente $\vec{v} = (2 , 4)$

Graficamente, temos:



$$\vec{v} = \overrightarrow{OP}$$

O(0 , 0): origem do vetor

P(2 , 4): extremidade do vetor

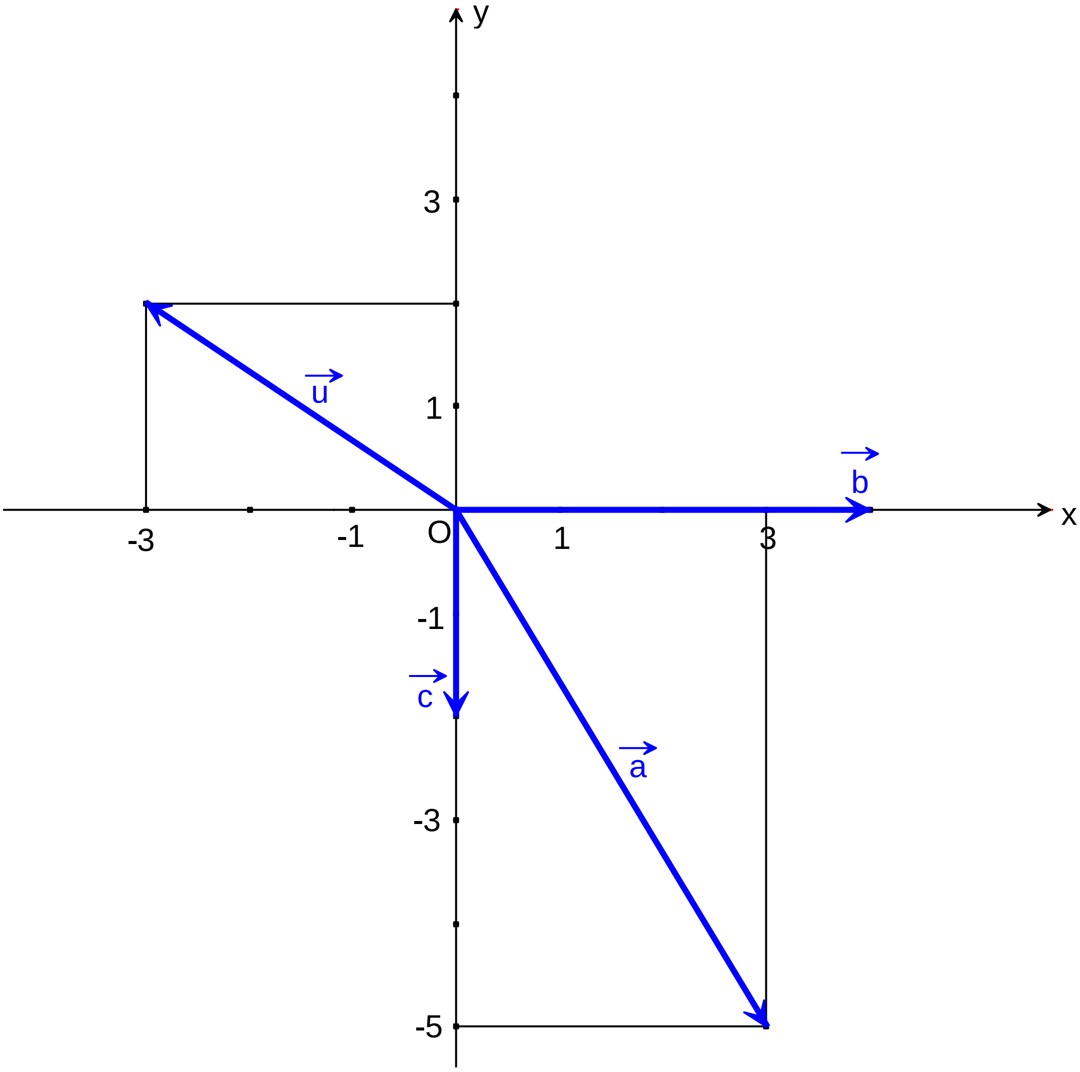
Exercício resolvido: Escreva a expressão analítica dos vetores abaixo e represente-os graficamente:

$\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (-3 , 2)$

$\vec{a} = 3\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = (3 , -5)$

$\vec{b} = 4\vec{i} \Rightarrow b = (4 , 0)$

$\vec{c} = -2\vec{j} \Rightarrow \vec{c} = (0 , -2)$


y
x
O
3
1
-1
-3
-5
-3
-1
1
3
u
b
c
a

Operações com Vetores: igualdade , soma e multiplicação por escalar

1. Igualdade de vetores:

Dois vetores $\overrightarrow{u} = (x_1 , y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2 , y_2)$ são iguais se e somente se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Exemplos: determine os valores de x e y para que os vetores sejam iguais:

a) $\overrightarrow{u} = (x+1, 4)$ e $\overrightarrow{v} = (5 , 2y-6)$

Resolução:

Para que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ precisamos ter:

$x + 1 = 5 \Rightarrow x = 5 - 1 = 4$

$2y - 6 = 4 \Rightarrow 2y = 4 + 6 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = 5$

Logo, x = 4 e y = 5

b) $\overrightarrow{u} = (7 , 2x+y)$ e $\overrightarrow{v} = (4x-y , 5)$

Resolução:

Para que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$, precisamos ter:

$$\begin{cases} 4x - y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, pelo método da adição, ou seja, vamos somar as duas equações e calcular o valor de x:

$$\begin{cases} 4x - y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \oplus$$

$$\begin{aligned} 6x &= 12 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de x encontrado em uma das duas equações do sistema, encontramos o valor de y:

$2x + y = 5$

$2.2 + y = 5$

4 + y = 5

y = 5 – 4

y = 1

Logo, x = 2 e y = 1

2. Soma e multiplicação por escalar

Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (x_1 , y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2 , y_2)$; o ponto P(a , b) e o número real α, temos:

i) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

ii) $\alpha \overrightarrow{u} = \alpha(x_1 , y_1) = (\alpha x_1 , \alpha y_1)$

iii) $P + \overrightarrow{u} = (a + x_1 , b + y_1)$, que são as coordenadas de um ponto Q, resultado da soma de ponto com vetor.

Exemplos:

(1) Dados os vetores $\overrightarrow{u} = (2 , 4)$ e $\overrightarrow{v}(-5, 2)$ e o ponto P(5 , 3), determine algébrica e geometricamente:

a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

b) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

c) $2\overrightarrow{u}$

d) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$

e) $P + \overrightarrow{u}$

Resolução:

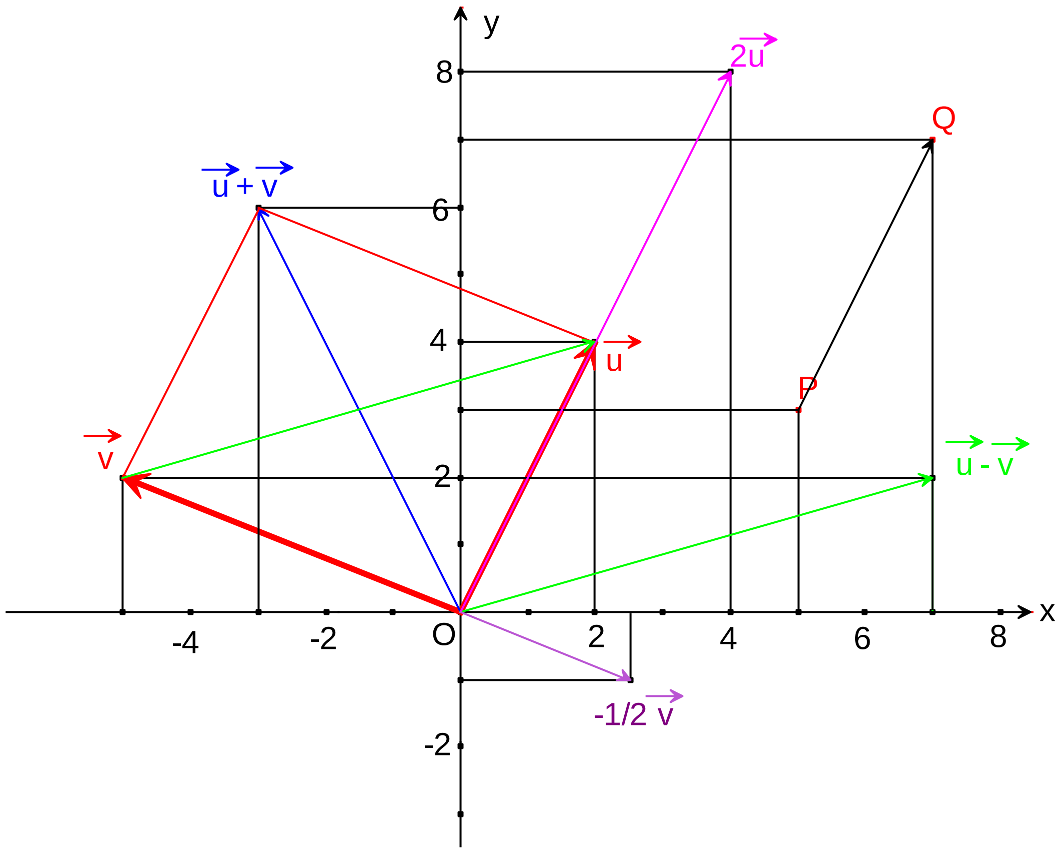
a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ = (2 + (-5) , 4 + 2) = (-3 , 6)

b) $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ = (2 - (-5) , 4 - 2) = (7 , 2)

c) $2\overrightarrow{u}$ = 2(2 , 4) = (4 , 8)

d) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{v} = -\frac{1}{2}(-5 , 2) = \left(\frac{5}{2} , -1\right)$

e) $P + \overrightarrow{u} = (5 + 2 , 3 + 4) = (7 , 7)$: ponto Q



(2) Determinar o vetor $\overrightarrow{x}$ na igualdade $3\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v} + \overrightarrow{x}$, sendo $\overrightarrow{u} = (3 , -1)$ e $\overrightarrow{v} = (-2 , 4)$.

Resolução:

$$3\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u}$$

$$2\overrightarrow{x} = \frac{1}{2}\overrightarrow{v} - 2\overrightarrow{u}$$

Dividindo ambos os membros da equação por 2, obtemos:

$$\overrightarrow{x} = \frac{1}{4}\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}$$

Portanto, temos:

$$\overrightarrow{x} = \frac{1}{4}(-2 , 4) - (3 , -1)$$

$$\overrightarrow{x} = \left(\frac{-2}{4}, \frac{4}{4}\right) - (3, -1) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right) - (3, -1) = \left(-\frac{1}{2} - 3, 1 - (-1)\right)$$

$$\overrightarrow{x} = \left(-\frac{7}{2}, 2\right)$$

(3) Encontrar os números a_1 e a_2, tais que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, sendo $\overrightarrow{v} = (10, 2)$; $\overrightarrow{v_1} = (3, 5)$ e $\overrightarrow{v_2} = (-1, 2)$.

Resolução:

Substituindo os vetores dados na expressão $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$, temos:

(10 , 2) = a_1(3 , 5) + a_2(-1 , 2)

Efetuando a multiplicação dos números a_1 e a_2 pelos vetores, temos:

(10 , 2) = (3 a_1 , 5 a_1) + (-1 a_2 , 2 a_2)

Somando os vetores, temos:

(10 , 2) = (3 a_1 - a_2 , 5 a_1 + 2 a_2)

Fazendo a igualdade entre os dois vetores, temos:

$$\begin{cases} 3a_1 - a_2 = 10 \\ 5a_1 + 2a_2 = 2 \end{cases}$$

Que é um sistema linear. Vamos resolvê-lo pelo método da adição, vamos, em primeiro lugar, multiplicar a primeira equação por 2:

$$\begin{cases} 6a_1 - 2a_2 = 20 \\ 5a_1 + 2a_2 = 2 \end{cases}$$

Agora vamos somar as duas equações e calcular o valor de a_1:

$$\begin{cases} 6a_1 - 2a_2 = 20 \\ 5a_1 + 2a_2 = 2 \end{cases} \oplus$$

$$11a_1 = 22$$

$$a_1 = 2$$

Substituindo o valor de a_1 encontrado em uma das duas equações do sistema, encontramos o valor de a_2:

3 a_1 - a_2 = 10

3.2 - a_2 = 10

6 - a_2 = 10

a_2 = 6 – 10

$a_2 = -4$

Logo, $\vec{v} = 2\vec{v}_1 - 4\vec{v}_2$

Vetor definido por dois pontos

Sendo $A(x_1 , y_1)$ a origem de **um representante** de um vetor e $B(x_2 , y_2)$ a sua extremidade, e ainda, se $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, temos:

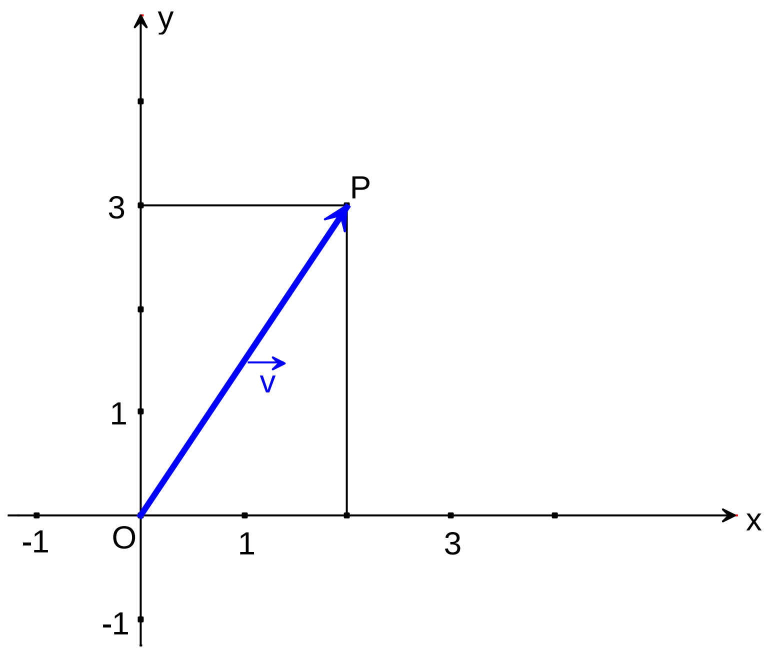
$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_2 - x_1 \ , \ y_2 - y_1)$$

Exemplos:

1) Seja $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, onde $A(1 , 2)$ e $B(3 , 5)$. Calcule as coordenadas do vetor e construa o seu gráfico.

Resolução:

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3-1 \ , \ 5-2) = (2 \ , 3)$



$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OP}$ é chamado **vetor posição** ou **representante natural** de $\overrightarrow{AB}$: vetor que melhor caracteriza $\overrightarrow{AB}$ dentre os infinitos representantes.

2) Dados os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$, onde A(1 , 2); B(5 , 3); C(-2 , -2) e D(0 , 4), calcule e represente:

a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

b) $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}$

c) A + $\overrightarrow{u}$

Resolução:

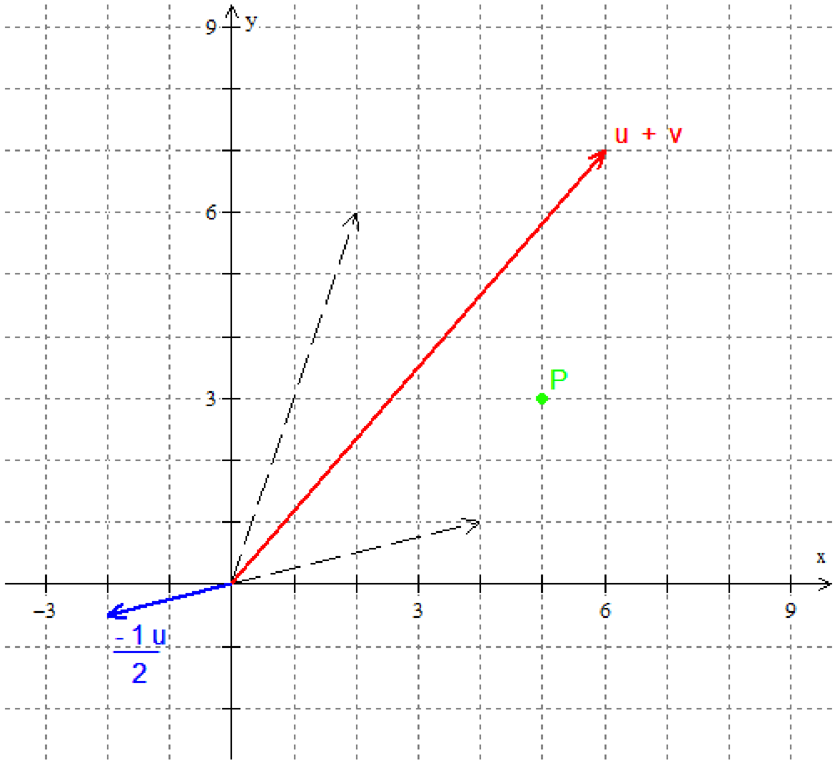
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5-1, 3-2) = (4 , 1)$

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD} = D - C = (0-(-2) , 4-(-2)) = (2 , 6)$

a) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (4 , 1) + (2 , 6) = (4+2 , 1+6) = (6 , 7)$

b) $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u} = -\dfrac{1}{2}(4 , 1) = \left(-\dfrac{4}{2} , -\dfrac{1}{2}\right) = \left(-2 , -\dfrac{1}{2}\right)$

c) A + $\overrightarrow{u} = (1, 2) + (4 , 1) = (1+4 , 2+1) = (5 , 3)$: ponto P



3) Determine a origem do vetor $\vec{v} = (-1, 3)$, sabendo que a sua extremidade está em B(3 , 1).

Resolução:

Chamando de A a origem procurada, temos:

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$

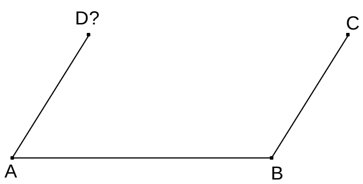
$(-1, 3) = (3, 1) - A$

$A = (3, 1) - (-1, 3)$

A(4 , - 2)

4) Sendo A(2 , 1); B(5 , 2) e C(6 , 5) vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD, determine o vértice D.

Resolução:



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$): mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento

B – A = C – D

(5 , 2) – (2 , 1) = (6 , 5) – D

D = (6 , 5) – (5 , 2) + (2 , 1)

Logo, D(3 , 4)

5) Dados os pontos A(-1 , 2); B(3 , -1) e C(-2 , 4), determine o ponto D de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Resolução:

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$D - C = \frac{1}{2}(B - A)$$

$$D - (-2\ ,\ 4) = \frac{1}{2}((3\ ,\ -1) - (-1\ ,\ 2))$$

$$D - (-2\ ,\ 4) = \frac{1}{2}(4\ ,\ -3)$$

$$D - (-2\ ,\ 4) = \left(\frac{4}{2}\ ,\ -\frac{3}{2}\right)$$

$$D = \left(2\ ,\ -\frac{3}{2}\right) + (-2\ ,\ 4)$$

$$D = \left(2 - 2\ ,\ -\frac{3}{2} + 4\right)$$

$$D\left(0\ ,\ \frac{5}{2}\right)$$

6) Sendo A(-2 , 4) e B(4 , 1) extremidades de um segmento, determinar os pontos F e G que dividem AB em três segmentos de mesmo comprimento.

Resolução:

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}B - A = \frac{1}{3}((4 , 1) - (-2 , 4)) = \frac{1}{3}(6 , -3) = \left(\frac{6}{3} , -\frac{3}{3}\right) = (2 , -1)$$

$\overrightarrow{AF} = (2 , -1)$

F – A = (2 , -1)

F – (-2 , 4) = (2 , -1)

F = (2 , -1) + (-2 , 4)

F(0 , 3)

$\overrightarrow{FG} = (2 , -1)$

G – F = (2 , -1)

G – (0 , 3) = (2 , -1)

G = (2 , -1) + (0 , 3)

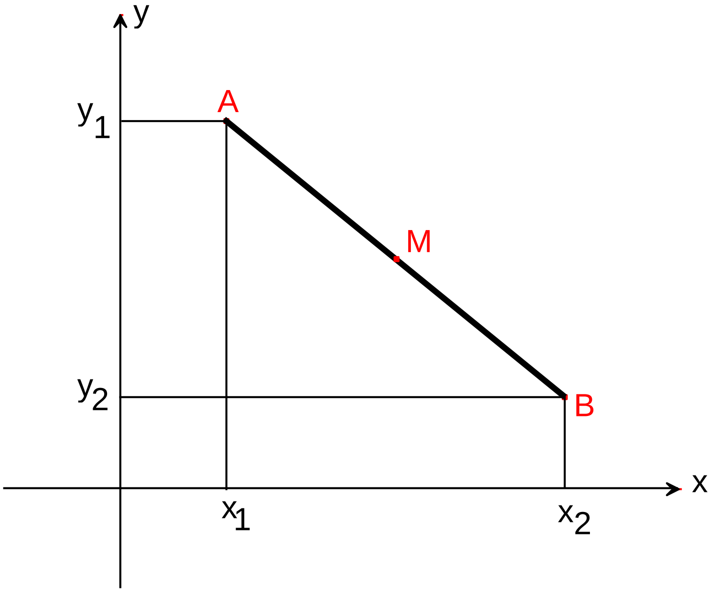
G(2 , 2)

Ponto médio, paralelismo e Norma (módulo)

Ponto médio:

Seja o segmento de extremos A(x_1 , y_1) e B(x_2 , y_2).

Sendo M(x , y) o ponto médio de AB, temos:



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$$

$$M - A = B - M$$

$$2M = A + B = (x_1 + x_2 \text{ , } y_1 + y_2)$$

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \text{ , } \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

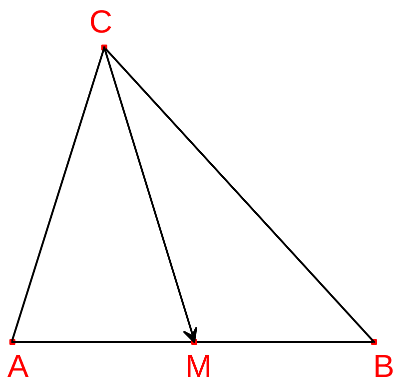
Exemplos:

1) Se A(-2 , 3) e B(5 , -1), então as coordenadas do ponto médio de AB são:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \text{ , } \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-2+5}{2} \text{ , } \frac{3+(-1)}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} \text{ , } 1\right)$$

2) Seja o triângulo de vértices A(4 , -1); B(2 , 5) e C(1 , -1). Calcule as coordenadas do vetor que representa a mediana relativa ao lado AB.

Resolução:



A mediana relativa ao lado AB do triângulo pode ser representada pelo vetor $\overrightarrow{CM}$ (ou pelo vetor $\overrightarrow{MC}$), onde M é o ponto médio de AB:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{4+2}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = (3, 2)$$

$$\overrightarrow{CM} = M - C = (3, 2) - (1, -1) = (2, 3)$$

Paralelismo de dois vetores:

Dois vetores $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ e $\overrightarrow{v} = (x_2, y_2)$ são paralelos se e somente se as correspondentes componentes são proporcionais, ou seja, se existe α tal que:

$$\overrightarrow{u} = \alpha\,\overrightarrow{v}$$

ou

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \alpha$$

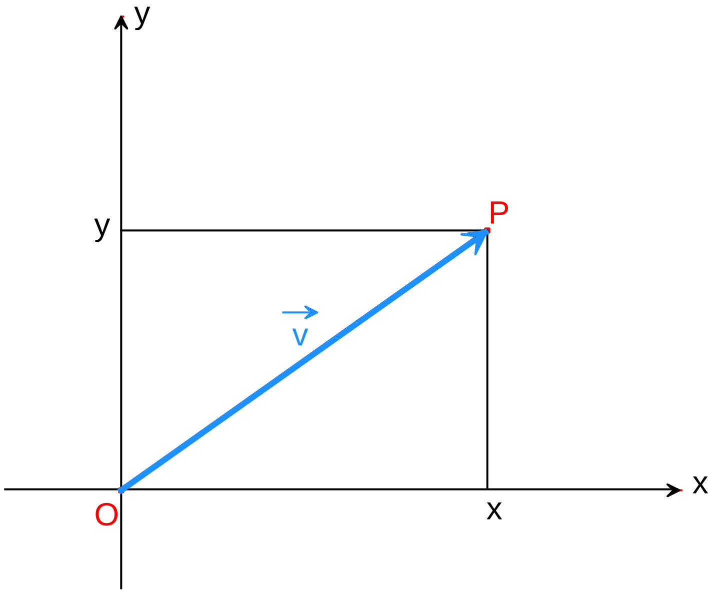
Exemplo:

$\overrightarrow{u} = (1, -2)$ e $\overrightarrow{v} = (-4, 8)$ são paralelos pois: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$ e $\frac{y_1}{y_2} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

$\overrightarrow{u} = (-4, -2)$ e $\overrightarrow{v} = (-14, 7)$ não são paralelos pois: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{-4}{-14} = \frac{2}{7}$ e $\frac{y_1}{y_2} = -\frac{2}{7}$

Norma (módulo) de um vetor:

Seja o vetor $\overrightarrow{v} = (x, y)$:



Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 = x^2 + y^2$$

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Exemplos:

1) Se $\overrightarrow{v} = (2, -3)$, então a sua norma é:

$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ u.c.

2) Calcular a norma do vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ sabendo que A(3 , 5) e B(4 , -2).

Resolução:

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, -7)$

Logo, $\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = \sqrt{2 \cdot 5^2} = 5\sqrt{2}$ u.c.

3) Dados os pontos A(3 , 5) e B(4 , -2) e os vetores $\overrightarrow{u} = (-1, 3)$ e $\overrightarrow{v} = (-2, -1)$, calcular:

a) $\left\|\overrightarrow{u}\right\|$

b) $\left\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right\|$

c) $\left\|2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}\right\|$

d) A distância entre os pontos A e B.

Resolução:

a) $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ u.c.

b) $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (-3, 2)$

Logo, $\left\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ u.c.

c) $2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} = (-2, 6) - (-6, -3) = (4, 9)$

Logo, $\left\|2\overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{(4)^2 + (9)^2} = \sqrt{16+81} = \sqrt{97}$ u.c.

d) A distância entre dois pontos é a norma do vetor que tem origem em um dos pontos e extremidade no outro:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 5)$

Logo, $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-3)^2 + (5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ u.c.

4) Calcular o valor de a para que $\overrightarrow{u} = (a\ ,\ -2)$ tenha módulo 4.

Resolução:

$$\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{a^2 + (-2)^2} = 4$$

Elevando-se ambos os membros da equação ao quadrado, obtemos:

$$\left(\sqrt{a^2 + (-2)^2}\right)^2 = 4^2$$

$$a^2 + (-2)^2 = 16$$

$$a^2 = 16 - 4 = 12$$

$$a = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

5) Encontrar um ponto P do eixo das abscissas de modo que a sua distância ao ponto A(2 , -3) seja igual a 5.

Resolução:

Como P pertence ao eixo x, então sua ordenada é nula, ou seja, as coordenadas do ponto procurado devem ser P(x , 0).

Como a distância entre o ponto A e o ponto P é 5, então devemos ter a norma do vetor formado por esses dois pontos igual a 5:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (x - 2\ ,\ 0 - (-3)) = (x - 2\ ,\ 3)$$

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{(x-2)^2 + (3)^2} = 5$$

$$\left(\sqrt{(x-2)^2 + (3)^2}\right)^2 = 5^2$$

$$(x - 2)^2 + 9 = 25$$

$$x^2 - 4x + 4 + 9 = 25$$

$$x^2 - 4x + 13 - 25 = 0$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \left\langle \begin{array}{l} x' = 6 \\ x'' = -2 \end{array} \right.$$

Portanto as coordenadas do ponto P são: (6 , 0) ou (-2 , 0).

6) Dados os pontos A(-4 , 3) e B(2 , 1), encontrar o ponto P pertence ao eixo das ordenadas e equidistante de A e B.

Resolução:

Como P pertence ao eixo y, então sua abscissa é nula, ou seja, as coordenadas do ponto procurado devem ser P(0 , y).

Como P é equidistante dos pontos A e B, então a distância do ponto P ao ponto A é a mesma que a distância do ponto P ao ponto B:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (0 - (-4)\ ,\ y - 3) = (4\ ,\ y - 3)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (0 - 2\ ,\ y - 1) = (-2\ ,\ y - 1)$$

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \sqrt{4^2 + (y-3)^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{BP}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + (y-1)^2}$$

$$\left\|\overrightarrow{AP}\right\| = \left\|\overrightarrow{BP}\right\|$$

$$\sqrt{4^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (y-1)^2}$$

$$\left(\sqrt{4^2 + (y-3)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(-2)^2 + (y-1)^2}\right)^2$$

‘$4^2 + (y – 3)^2 = (-2)^2 + (y – 1)^2$

$16 + y^2 – 6y + 9 = 4 + y^2 – 2y + 1$

$– 6y + 2y= 5 – 25$

$– 4y = – 20$

$y = 5$

Portanto as coordenadas do ponto P são: (0 , 5).