Aproximação de Funções

Método dos Mínimos Quadrados-MMQ

Suponha que você tenha realizado um experimento e tenha coletado dados, que foram armazenados em uma tabela. Posteriormente ao experimento, você precisa saber de um certo valor de seu experimento que não foi anotado e o experimento não se pode mais repetir ... o que fazer?

Se você tem uma função que representa os seus dados coletados, então basta atribuir o valor da variável independente que você deseja conhecer na sua função e calcular o valor desejado.

Como obter uma função que se aproxima dos meus dados coletados?

Dada uma tabela de dados, como a abaixo:

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
f(x)	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\cdots$	$f(x_n)$

queremos determinar uma função $y(x)$ que aproxima, o melhor possível, os dados da tabela acima.

Considere uma família de curvas como a da função abaixo:

$y(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_m g_m(x)$

onde $a_j \in R, j = 1,2,\cdots,m$ e $g_j(x)$ são funções previamente escolhidas, de acordo com o comportamento de nossos dados.

Para cada sequência $(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m)$ teremos uma $y(x)$ correspondente e existe uma sequencia para os quais a função $y(x)$ é a que mais se aproxima dos dados. Em outras palavras, a diferença (resíduo) entre f(x) e $y(x)$, ou seja, $\varepsilon = y(x) - f(x)$ são os menores.

Fazendo S a soma dos quadrados dos resíduos , isto é:

$$S = \sum (\varepsilon_i)^2 = \sum [y(x) - f(x)]^2 =$$

$$= \sum [a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \cdots + a_m g_m(x) - f(x_i)]^2$$

e como as $f(x_i)$ e $g(x_i)$ são conhecidas, então S é uma função em relação aos a_j, ou seja:

$$S = S(\ a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m\ )$$

Queremos determinar os a_j para que S seja mínima, então basta impor que as derivadas parciais de S em relação aos a_j seja igual a zero, isto é:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \qquad \cdots, \qquad \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0$$

Calculando essas derivadas parciais, obteremos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 \cdot \sum g_0(x_i)g_0(x_i) + a_1 \sum g_0(x_i)g_1(x_i) + a_2 \sum g_0(x_i)g_2(x_i) + \cdots + a_m \sum g_0(x_i)g_m(x_i) = \sum g_0(x_i)f(x_i) \\ a_0 \cdot \sum g_1(x_i)g_0(x_i) + a_1 \sum g_1(x_i)g_1(x_i) + a_2 \sum g_1(x_i)g_2(x_i) + \cdots + a_m \sum g_1(x_i)g_m(x_i) = \sum g_1(x_i)f(x_i) \\ \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_0 \cdot \sum g_m(x_i)g_0(x_i) + a_1 \sum g_m(x_i)g_1(x_i) + a_2 \sum g_m(x_i)g_2(x_i) + \cdots + a_m \sum g_m(x_i)g_m(x_i) = \sum g_m(x_i)f(x_i) \end{cases}$$

O sistema acima é chamado sistema normal do MMQ. Resolvendo o sistema temos os a_j da melhor função $y(x)$

que aproxima os dados tabelados.

Para facilitar a visualização dos cálculos, utilizamos o seguinte dispositivo prático:

$g_0(x)$	$g_1(x)$	....	$g_m(x)$	$f(x)$
$g_0(x_0)$	$g_1(x_0)$		$g_m(x_0)$	$f(x_0)$
$g_0(x_1)$	$g_1(x_1)$		$g_m(x_1)$	$f(x_1)$
...	...	...	...	...
$g_0(x_n)$	$g_1(x_n)$		$g_m(x_n)$	$f(x_n)$
$\sum g_0^2$	$\sum g_0 g_1$		$\sum g_0 g_m$	$\sum g_0 f$
$\sum g_1 g_0$	$\sum g_1^2$		$\sum g_1 g_m$	$\sum g_1 f$
...	...	...	...	...
$\sum g_m g_0$	$\sum g_m g_1$		$\sum g_m^2$	$\sum g_m f$

Observe que o sistema acima é simétrico.

Os valores do quadro assinalado acima são os coeficientes do sistema normal. Em seguida resolve-se o sistema para obter os valores a_j

EXEMPLOS

Exemplo1: Aproximar os dados por uma curva da família $y = a_0x + a_1\sqrt{x}$.

x	1	2	3	4
f(x)	2,50	3,83	4,96	6,00

A família $y = a_0 . \underbrace{x}_{g_0(x)} + a_1 . \underbrace{\sqrt{x}}_{g_1(x)}$ **nos fornece as funções** $g_0(x)$ **e** $g_1(x)$

O DISPOSITIVO PRÁTICO FICA:

$g_0(x) = x$	$g_1(x) = \sqrt{x}$	$f(x)$
$g_0(x_0) = 1$	$g_1(x_0) = 1$	$f(x_0) = 2,50$
$g_0(x_1) = 2$	$g_1(x_1) = \sqrt{2}$	$f(x_1) = 3,83$
$g_0(x_2) = 3$	$g_1(x_2) = \sqrt{3}$	$f(x_2) = 4,96$
$g_0(x_3) = 4$	$g_1(x_3) = 2$	$f(x_3) = 6,00$
$\sum g_0^2 = 30$	$\sum g_0 g_1 = 17,02$	$\sum g_0 f = 49,04$
$\sum g_1 g_0 = 17,02$	$\sum g_1^2 = 10$	$\sum g_1 f = 28,51$

O sistema normal será:

$$\begin{cases} 30a_0 + 17,02a_1 = 49,04 \\ 17,02a_0 + 10a_1 = 28,51 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema, obtem-se: $a_0 = 0,5$ e $a_1 = 2$.

Portanto a curva da família $y = a_0x + a_1\sqrt{x}$ que mais aproxima os dados tabelados é:
$y = 0,5x + 2\sqrt{x}$

Exemplo 2: Aproximar os dados por um polinômio completo do 2º grau.

x	-1	0	1	2
f(x)	10	1	-2	5

Soluçao: O polinômio de grau 2 é da família $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

O dispositivo fica:

1	x	x^2	f(x)
1	-1	1	10
1	0	0	1
1	1	1	-2
1	2	4	5
4	2	6	14
2	6	8	-2
6	8	18	28

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 + 6a_2 = 14 \\ 2a_0 + 6a_1 + 8a_2 = -2 \\ 6a_0 + 8a_1 + 18a_2 = 28 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema normal temos: $a_0 = 0{,}4$; $a_1 = -5{,}8$ e $a_2 = 4$.

O polinômio é $y = 0{,}4 - 5{,}8x + 4x^2$.