LIMITE DE UMA FUNÇÃO A UMA VARIÁVEL REAL

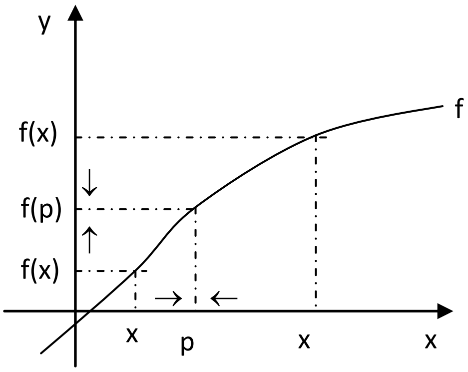
NOÇÃO INTUITIVA DE LIMITE

Intuitivamente, falar que o limite de uma função f(x), quando **x** tende a **p**, é igual a **L**, o qual escrevemos simbolicamente:

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

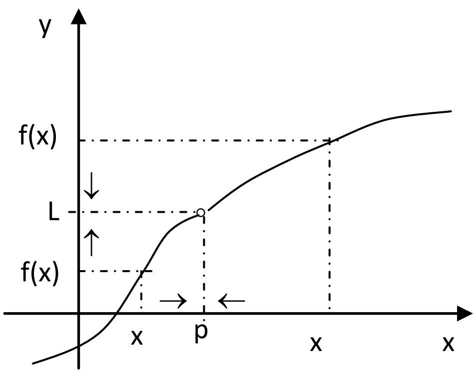
significa que quando **x** se aproxima de **p**, tanto pela direita, quanto pela esquerda, o valor da função se aproxima de **L**.

Observe:



Quando **x** tende a **p**, f(x) tende a f(p): $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$

Obs: Intuitivamente, espera-se que se a função está definida em p e for continua em p, então $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$



Quando **x** tende a **p**, f(x) tende a L: $\lim_{x \to p} f(x) = L$

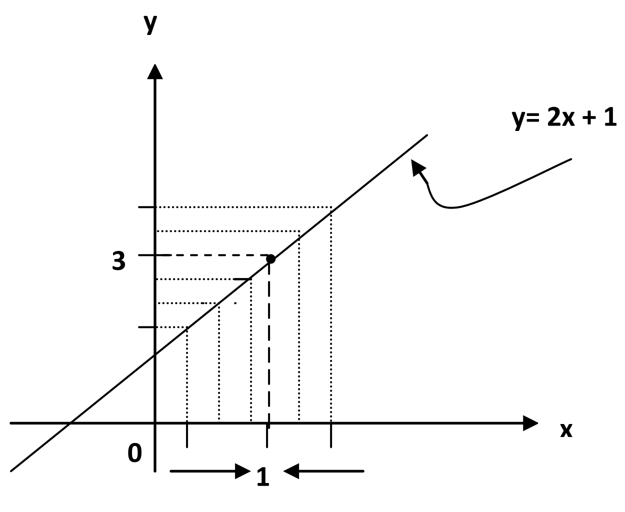
Por outro lado, se f não é continua em p e $\lim_{x \to p} f(x) = L$, então L será o valor que f deveria ter em p.

Veja o exemplo abaixo:

Seja a função **f(x) = 2x +1**. Vamos atribuir valores para **x** proximos de 1, pela sua direita (**Valores maiores que 1**) e pela sua esquerda (**Valores menores que 1**), e em seguida, calcular **y**.

x	**y = 2x + 1**
1,5	4
1,3	3,6
1,1	3,2
1,05	3,1
1,02	3,04
1,01	3,02

x	**y = 2x + 1**
0,5	2
0,7	2,4
0,9	2,8
0,95	2,9
0,98	2,96
0,99	2,98



À medida que **x** se aproxima de **1**, **y** se aproxima de **3**, ou seja, quando **x tende a 1** (**x** $\rightarrow$ **1**), **y tende a 3** (**y** $\rightarrow$ **3**), então temos a notação:

$$\lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$$

DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE:

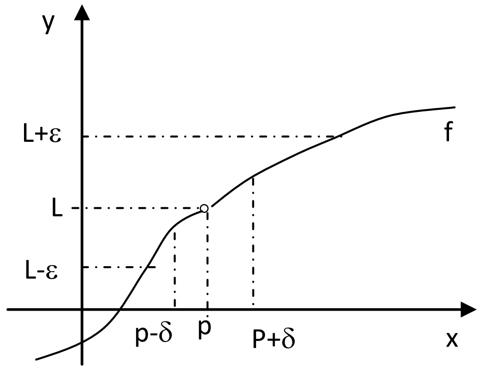
Seja um intervalo aberto I, contendo p, e seja f(x), uma função definida em I, exceto possivelmente no próprio p. Dizemos que o limite de f(x) quando x se aproxima de p é igual a L, cuja notação é $\lim_{x\to p} f(x) = L$, se para todo ε > 0 dado, existir um δ > 0 tal que, para todo x ∈ I, temos:

$$0 < |x - p| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

Tal número L, que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x\to p} f(x)$

Analise os gráficos abaixo:

a)

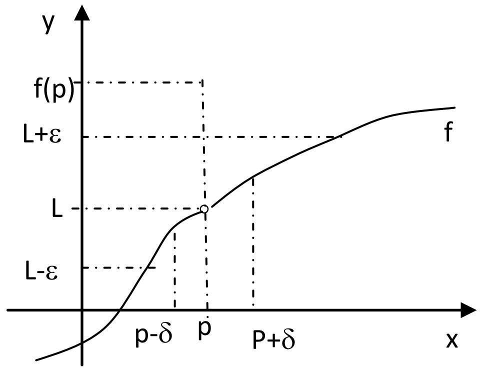


f não está definida em p, mas existe L que satisfaz a propriedade:

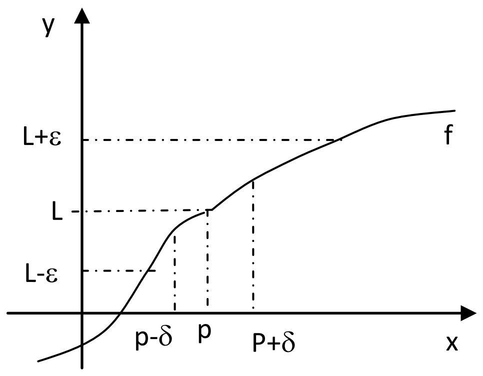
para todo ε > 0 dado, existe um δ > 0 tal que, para todo x ∈ I,

$$0 < |x - p| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

b)

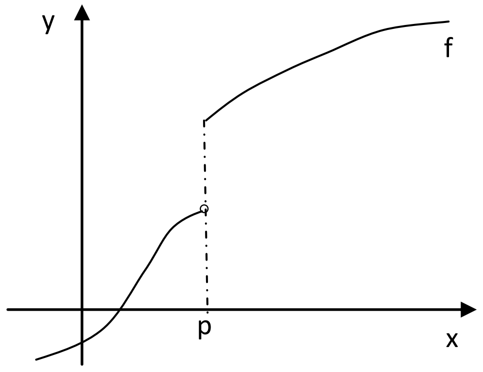


f está definida em p, mas não é continua em p. No entanto, existe L que satisfaz a propriedade acima c)



f é continua em p, desta maneira f(p) = L satisfaz a propriedade acima

a)



não existe L que satisfaz a propriedade:

Vejamos, abaixo, um exemplo da definição acima:

"Usando a definição acima, prove que $\lim_{x\to 1}(3x-1)=2$"

De acordo com a definição acima, precisamos provar que:

para todo ε > 0 dado, existe um δ > 0 tal que,

$$|(3x-1)-2| < \varepsilon \text{ sempre que } 0 < |x-1| < \delta$$

Assim:

$$|(3x-1)-2| < \varepsilon$$

$$|(3x-3)| < \varepsilon$$

$$|3(x-1)| < \varepsilon$$

$$3|(x-1)| < \varepsilon$$

$$|(x-1)| < \varepsilon/3$$

Como $|x-1| < \delta$ então $\delta = \varepsilon/3$, de modo que existe o δ

Exemplos:

1)Seja a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ **, calcule o** $\lim\limits_{x \to 1}$ **f(x)**

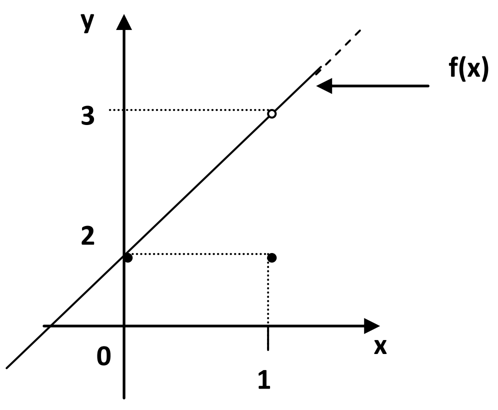
como $x^2 + x - 2 = (x - 1).(x + 2) \Leftrightarrow \frac{(x-1).(x+2)}{x-1}$; $x \neq 1$

Podemos notar que para **x** $\rightarrow$ **1**, **f(x)** $\rightarrow$ **3**, embora para **x = 1**, **f(x) = 2** $\neq$ **3 .** Ocorre no entanto que procuramos o comportamento da função para_ (**x** $\rightarrow$ **1**), logo temos $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

Comprovando:

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{x^2+x-2}{x-1}\right) = \lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+2) = 1 + 2 = 3$$

Se **g : R** $\rightarrow$ **R** e **g(x) = x + 2** , $\lim\limits_{x \to 1}$ **g(x)** = $\lim\limits_{x \to 1}$ (x + 2) = 1 + 2 = **3** , embora **g(x)** $\neq$ **f(x)** em **x = 1**. No entanto, ambas têm o mesmo limite.



2) Calcule o $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

Nota-se a impossibilidade de calcularmos $\frac{x^2-4}{x-2}$ para **x = 2** (**Indeterminação**).

Trocamos então $\frac{x^2-4}{x-2}$ por **x + 2** , possibilitando assim o cálculo quando **x tende a 2**.

3) Calcule o $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)}{(x+3)}=\frac{3-1}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

PROPRIEDADES DOS LIMITES

Proposição. Se $\lim_{x\to p} f(x)$ *e* $\lim_{x\to p} g(x)$ exitem, e $\boldsymbol{c}$ é um numero rela qualquer, então:

I) $\lim_{x\to p}[\,\mathbf{f}(\mathbf{x}) \pm \mathbf{g}(\mathbf{x})\,] = \lim_{x\to p} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \pm \lim_{x\to p} \mathbf{g}(\mathbf{x})$

Exemplo : $\lim_{x\to 2}(\mathbf{x}+\mathbf{4x}^2)=\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}4\mathbf{x}^2=2+4(2^2)=2+4(4)=18$

II) $\lim_{x\to p} cf(x)=c\lim_{x\to p} f(x)$

Exemplo : $\lim_{x\to 2}(\mathbf{4x}^2)=4\lim_{x\to 2}\mathbf{x}^2=4(2^2)=4(4)=16$

III) $\lim\limits_{x\to p}$ **[f(x) . g(x)]** = $\lim\limits_{x\to p}$f(x) **.** $\lim\limits_{x\to p}$g(x)

<u>**Exemplo**</u> **:** $\lim\limits_{x\to 10}$ **(-x² . log x) =** $\lim\limits_{x\to 10}$ -x² **.** $\lim\limits_{x\to 10}$ log x = -10² . log 10 = -100 . 1 = **- 100**

$$\textbf{IV) } \mathbf{lim}_{x\to p}\frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}} = \frac{\lim\limits_{x\to p} f(x)}{\lim\limits_{x\to p} g(x)}$$

<u>**Exemplo**</u> **:** $\mathbf{lim}_{x\to 0}\frac{\boldsymbol{sen(x)}}{\boldsymbol{x^2-1}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} sen(x)}{\lim\limits_{x\to 0} (\boldsymbol{x^2-1})} = \frac{\boldsymbol{sen(0)}}{\boldsymbol{(0^2-1)}} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{-1}} = \mathbf{0}$

V) $\mathbf{lim}_{x\to p}[\boldsymbol{f(x)}]^{\boldsymbol{n}} = \left[\lim\limits_{x\to p} f(x)\right]^{\boldsymbol{n}}$, n ∈ **N***

<u>**Exemplo**</u> **:** $\mathbf{lim}_{x\to 2}[\mathbf{x}^2 - \mathbf{2}\ )]^3 = [\mathbf{lim}(_{x\to 2}\,\mathbf{x}^2 - \mathbf{2})]^3 = (\mathbf{2}^2 - \mathbf{2})^3 = \mathbf{2}^3 = \mathbf{8}$

VI) $\mathbf{lim}_{x\to p}\sqrt[n]{\boldsymbol{f(x)}} = \sqrt[n]{\mathbf{lim}_{x\to p}\,\boldsymbol{f(x)}}$ **,** $n \in \mathrm{N}^* \wedge f(x) \geq 0$ **.(** Se f(x) ≤ 0, **n** é ímpar **)**

<u>**Exemplo**</u> **:**

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3+x^2-1} = \sqrt{\lim_{x\to 2} x^3+x^2-1} = \sqrt{2^3+2^2-1} = \sqrt{8+4-1} = \sqrt{11}$$

VII) $\lim_{x\to p} ln[f(x)] = ln\left[\lim_{x\to p} f(x)\right], se\ \lim_{x\to p} f(x) > 0$

Exemplo : $\lim_{x\to\pi} ln[x^3] = ln[\lim_{x\to\pi} x^3] = ln\pi^3 = 3ln\pi$

VIII) $\lim_{x\to p} sen[f(x)] = sen\left[\lim_{x\to p} f(x)\right]$

Exemplo :

$$\lim_{x\to 2} sen[2x^3 - 5x] = sen\left[\lim_{x\to 2} (2x^3 - 5x)\right] = sen(\left(2(2^3) - 5(2)\right) = \mathrm{sen}(6)$$

8) $\lim_{x\to p} e^{f(x)} = e^{\lim_{x\to p} f(x)}$

Exemplo :

$$\lim_{x\to 2} e^{(x^2+3x)} = e^{\lim_{x\to 2}(x^2+3x)} = e^{4+6} = e^{10}$$

Exercícios :

1) Calcular :

a) $\lim_{x\to 2} (2x^2 + 3x - 4) =$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1} =$

k) $\lim_{t\to o} \dfrac{\sqrt{25+3t} - 5}{t} =$

l) $\lim_{t\to 0} \dfrac{(4+t)^2 - 16}{t} =$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} =$

m) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} =$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x} =$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} =$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1} =$

o) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^5 - 1} =$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} =$

p) $\lim\limits_{h \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{h} - 1}{\sqrt[5]{h} - 1} =$

g) $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 3x + 4) =$

q) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x - 1} =$

h) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + \operatorname{sen} x) =$

r) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{b^2 + at} - b}{t} ; b > 0 =$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4} =$

j) $\lim\limits_{h \to 1} \dfrac{\sqrt{h} - 1}{h - 1} =$

BIBLIOGRAFIA:

FLEMMING, D.M. ; GONÇALVES, M.B. Cálculo A. São Paulo: Pearson Education, 2001

GUIDORIZZI, H.L. Um curso de cálculo vol 1. São Paulo: LTC, 2001

SIMMONS, G. F. Cálculo com Geometria Analítica vol1. São Paulo: Pearson Education, 1988

STEWART, J. Cálculo vol 1. São Paulo: Cengage Learning, 2009

THOMAS, G.B. Cálculo vol1, São Paulo: Addison Weslwy, 2009