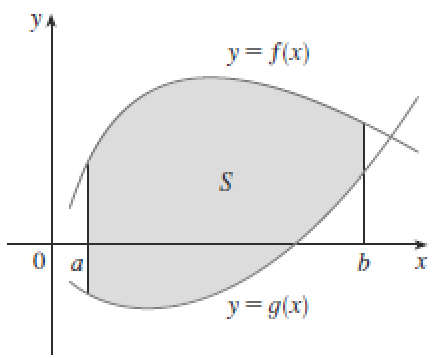
Cálculo II
Cálculo de áreas

Prof Luis Carlos
Fatec Itaquera

Cálculo de áreas

Na aula anterior abordamos o conceito e integral definida e o cálculo de áreas de regiões sob funções. Nesta aula vamos calcular a área de regiões entre o gráfico de duas funções

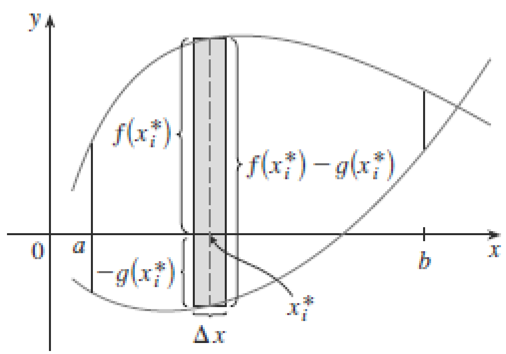
Considere a região S entre duas curvas y = f(x) e y = g(x) e entre as retas verticais x = a e x = b, de modo que f e g sejam funções contínuas e f(x) ≥ g(x) para todo x em [a,b], conforme figura:

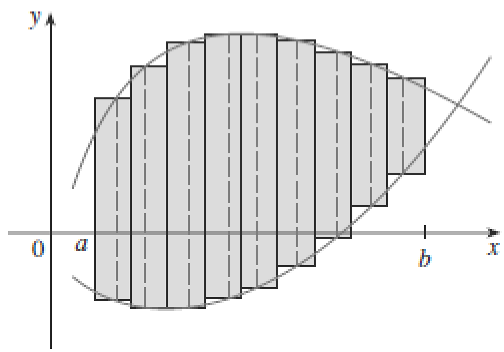


$$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

Cálculo de áreas

Para calcular a área da região anterior, vamos dividir S em n faixas de largura iguais e então aproximamos a i-ézima faixa por um retângulo de base Δx e altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. Veja figura abaixo:





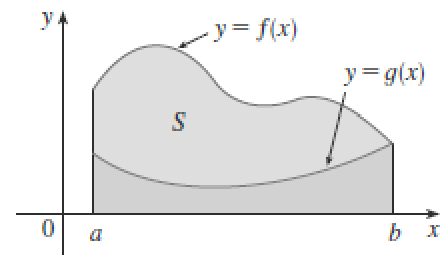
A soma de Riemann: $\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$

é uma aproximação do que intuitivamente consideramos como a área da região S

Cálculo de áreas

Observação: No caso de g(x) = 0 então S é a região sob o gráfico de f(x) , como visto na aula anterior, e a área é igual à integral definida de a até b. No caso de f(x) e g(x) serem ambas positivas, o gráfico abaixo esclarece o porque de f(x) – g(x):

$$A = \int_a^b [f(x)]dx - \int_a^b [g(x)]dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



Essa aproximação fica cada vez melhor, quando n $\rightarrow \infty$. Desta maneira, a área A da região S é igual ao limite da soma dos retângulos aproximantes, isto é:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

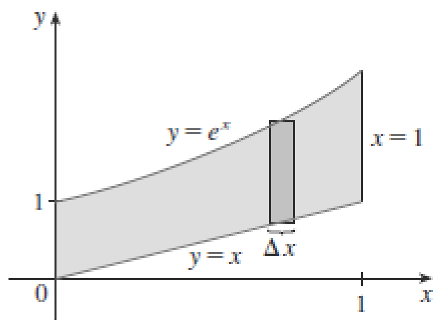
A área A da região S limitada pelas curvas y = f(x) e y = g(x) e pelas retas verticais x = a e x = b, onde f e g são contínuas e f(x) $\geq$ g(x) para todo x em [a,b], é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Cálculo de áreas

Exemplos:

1) Calcule a área da região limitada acima por $f(x) = e^x$ e abaixo por y = x ; e nos lados por x = 0 e x = 1



$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$

$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1.5 \;uA$$

Na figura acima foi desenhado um retângulo aproximante típico com largura Δx para lembrar do procedimento pelo qual a área foi definida.

De modo geral, é útil esboçar a região para identificar a curva superior, y_s , a curva inferior, y_i e um retângulo aproximante típico como na figura acima.

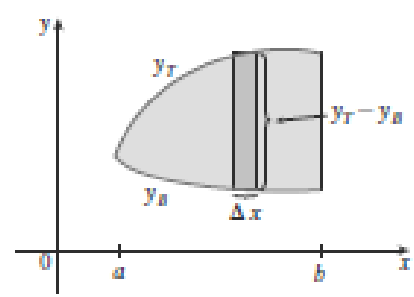
Cálculo de áreas

A área do retângulo típico é (y_s - y_i) Δx. Assim, a equação:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [y_s - y_i] \Delta x = \int_a^b [y_s - y_i] dx$$

resume o procedimento de adição das áreas de todos os retângulos típicos.

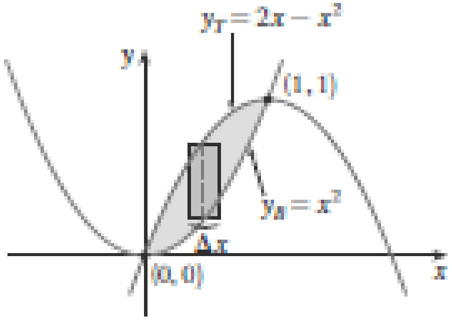
Observe na figura abaixo que a fronteira esquerda se reduz a um ponto. Quando as fronteiras direita e esquerda se reduzem a um ponto, precisamos determinar que são a e b .



Cálculo de áreas

2) Calcule a área da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$, conforme figura abaixo.

Resolução: Primeiro precisamos encontrar os pontos de intersecção das parábolas resolvendo a equação: $x^2 = 2x - x^2$



A solução da equação é x=0 e x=1. Assim os pontos de interseção são : (0,0) e (1,1) . Conforme figura, a fronteira superior é $y_s = 2x - x^2$ e a inferior é $y_i = x^2$.

A área do retângulo típico é dada por $(y_s - y_i)\, \Delta x = (2x - x^2 - x^2)\, \Delta x$; a região está entre x = 0 e x = 1. Assim:

$$A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)\, dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\ uA$$

Cálculo de áreas

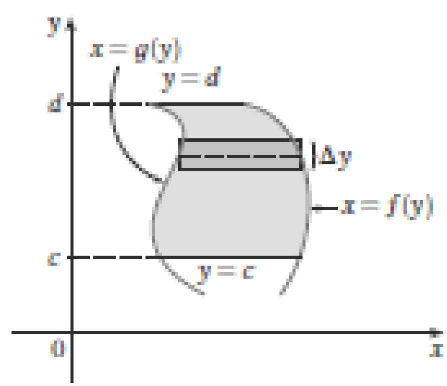
Observação:

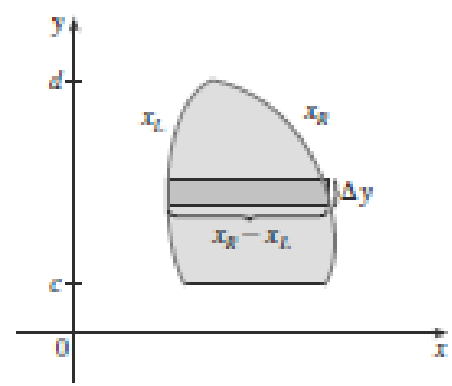
Existem regiões que ficam mais fáceis de calcular se considerarmos o x como uma função de y, isto é, x = f(y).

Se uma região é limitada por curvas com equações do tipo x = f(y) e x = g(y) ; y = c e y = d ; com f e g contínuas e f(y) ≥ g(y) para c ≤ y ≤ d, então sua área é:

$$A = \int_c^d (f(y) - g(y))\, dy$$

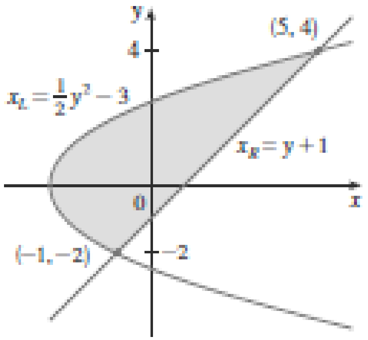
Observação os gráficos:





Cálculo de áreas

3) Calcule a área da região limitada pela reta y = x – 1 e pela parábola $y^2 = 2x + 6$.



Resolução: Primeiro precisamos encontrar os pontos de intersecção das funções. Obtemos os pontos (-1,-2) e (5,4)

Em seguida isolamos o x e obtemos : $x_E = \frac{1}{2}y^2 - 3$ e $x_D = y + 1$

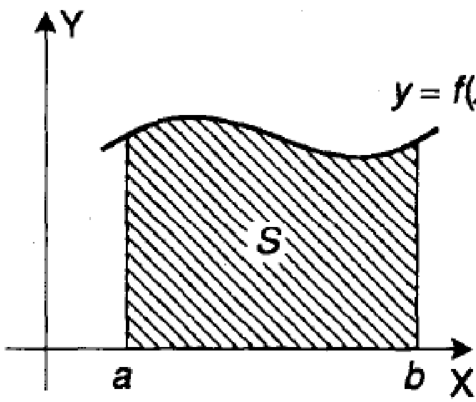
A área do retângulo típico é dada por $(x_E - x_D)\,\Delta y$; a região está entre y = -2 e y = 4. Assim:

$$A = \int_{-2}^{4} \left((y+1) - (\frac{1}{2}y^2 - 3) \right) dy = \int_{-2}^{4} \left(-\frac{1}{2}y^2 + y + 4) \right) dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} + 4y \Big|_{-2}^{4} = \frac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\frac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18\, uA$$

Cálculo de áreas - Classificação

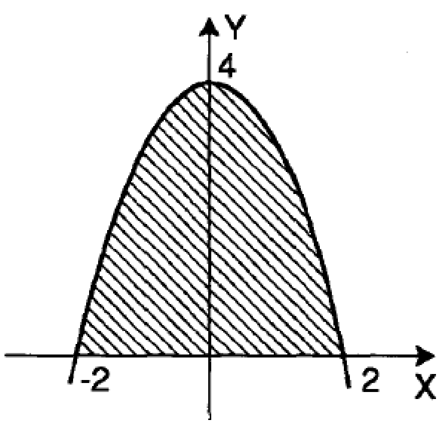
Caso I. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \geq 0$, $\forall \; x \in [a, b]$



Neste caso, a área é dada por

$$A = \int_a^b f(x) \; dx \; .$$

Exemplo. Encontre a área limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo dos x.



$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2) \; dx \qquad = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$

$$= \left[(8 - 8/3) - \left(-8 - \frac{(-2)^3}{3} \right) \right] = \frac{32}{3}$$

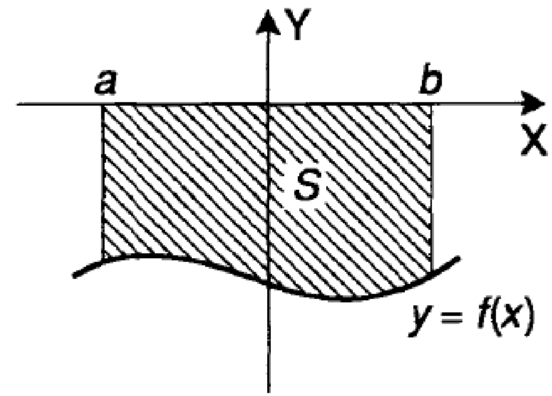
Portanto, $A = 32/3$ u $\cdot$ a (32/3 unidades de área).

Cálculo de áreas - Classificação

Caso II. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de f, pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo dos x, onde f é contínua e $f(x) \leq 0$, $\forall\ x \in [a, b]$

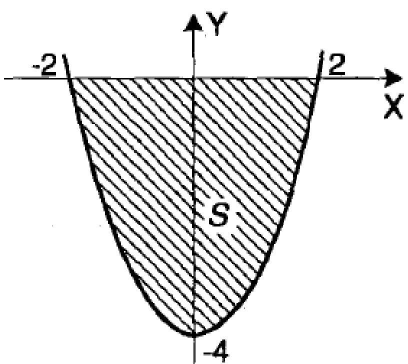
neste caso basta tomar o módulo da integral

$$A = \left| \int_a^b f(x)\ dx \right|$$



Exemplos.

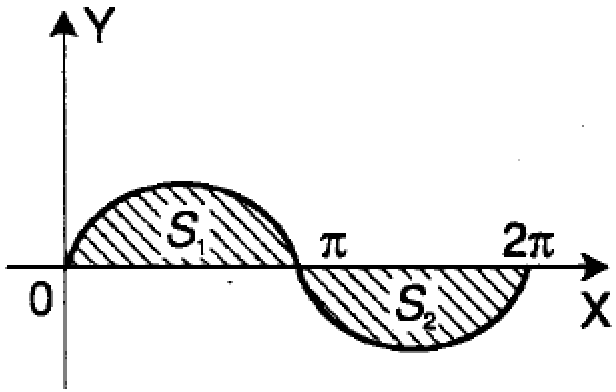
(*i*) Encontre a área limitada pela curva $y = -4 + x^2$ e o eixo dos x.



$$A = \left| \int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\ dx \right| = \left| \frac{-32}{3} \right| = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

Cálculo de áreas - Classificação

(ii) Encontre a área da região S, limitada pela curva $y = \text{sen } x$ e pelo eixo dos x de 0 até 2π.



Precisamos dividir a região S em duas subregiões S_1 e S_2

No intervalo $[0, \pi]$, $y = \text{sen } x \geq 0$ e no intervalo $[\pi, 2\pi]$, $y = \text{sen } x \leq 0$. Portanto, se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2, temos

Cálculo de áreas - Classificação

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x \, dx \right|$$

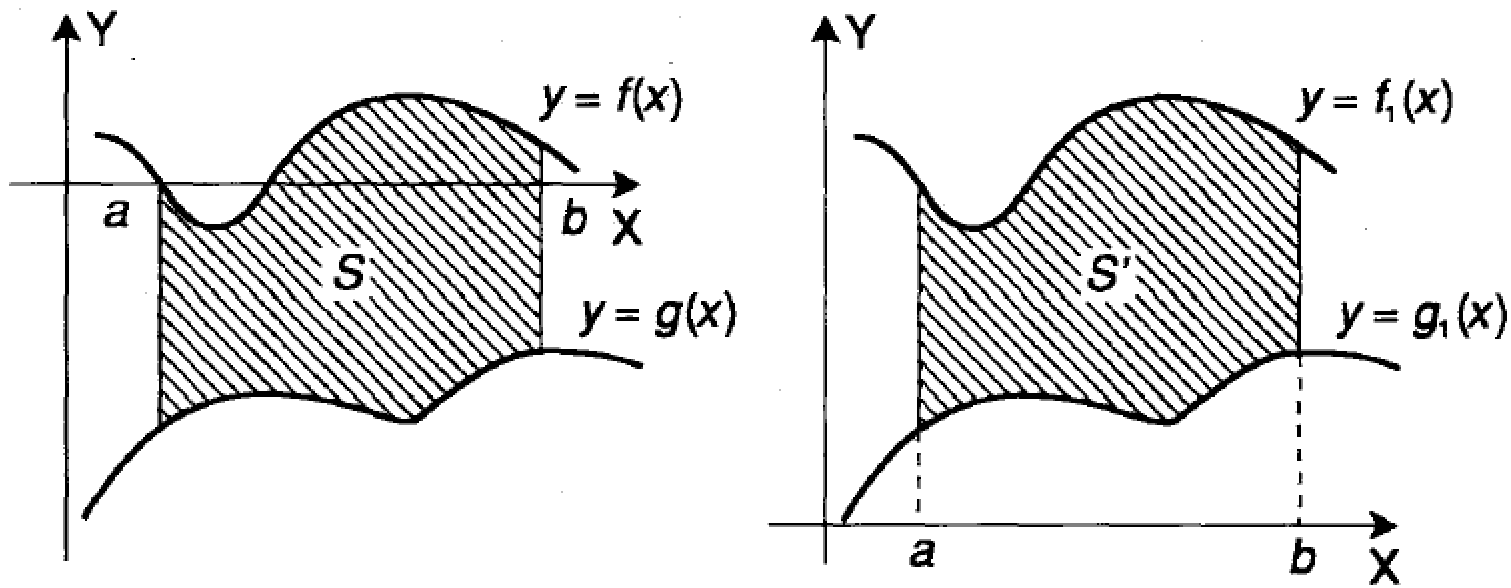
$$= -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| -\cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right|$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 + | -\cos 2\pi + \cos \pi |$$

$$= -(-1) + 1 + | -1 + (-1) | = 4 \text{ u.a.}$$

Cálculo de áreas - Classificação

Caso III. Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de f e g, pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.



$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx\,.$$

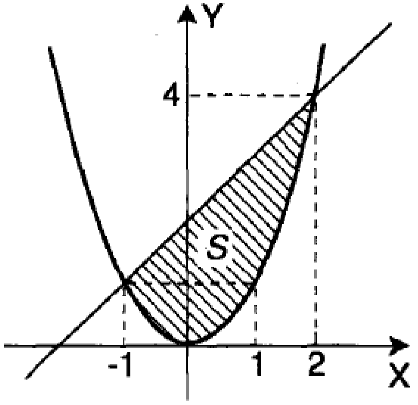
Cálculo de áreas - Classificação

Exemplos

(*i*) Encontre a área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

As curvas $y = x^2$ e $y = x + 2$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1 e 2

No intervalo $[-1, 2]$, temos $x + 2 \geq x^2$. Então,



$$A = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^2}{2} + 2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 2 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{9}{2} \text{ u.a.}$$

Cálculo de áreas - Classificação

(*ii*) Encontre a área limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$.

As curvas $y = x^3$ e $y = x$ interceptam-se nos pontos de abscissa -1, 0 e 1

No intervalo $[-1, 0]$, $x < x^3$ e no intervalo $[0, 1]$, $x > x^3$. Logo,

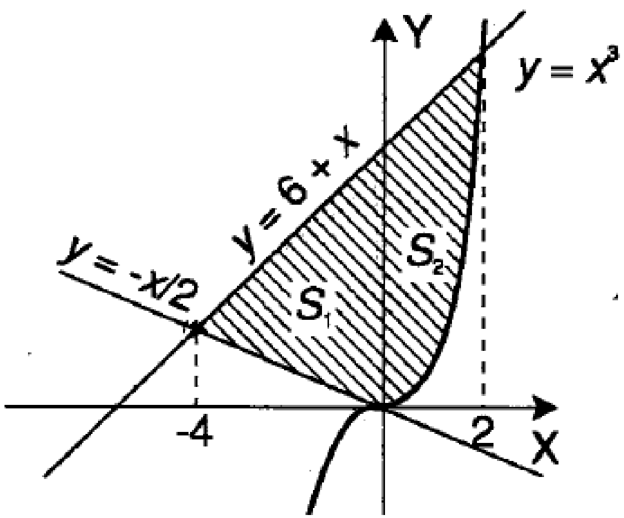
$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\ dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\ dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

Cálculo de áreas - Classificação

(*iv*) Encontre a área da região S limitada pelas curvas $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

Devemos dividir a região em duas subregiões S_1 e S_2



No intervalo $[-4, 0]$, a região está compreendida entre os gráficos de $y = \dfrac{-x}{2}$ e $y = 6 + x$ (região S_1).

No intervalo $[0, 2]$, está entre os gráficos de $y = x^3$ e $y = x + 6$ (região S_2).

Cálculo de áreas - Classificação

Se A_1 é a área de S_1 e A_2 é a área de S_2,

então a área A procurada é dada por $A = A_1 + A_2$.

Cálculo de A_1: No intervalo $[-4\ ,\ 0]$, $6 + x \geq -\dfrac{x}{2}$. Assim,

$$A_1 = \int_{-4}^{0} [(6 + x) - (-x/2)]\ dx$$

$$= \int_{-4}^{0} \left(6 + \frac{3x}{2}\right) dx = \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right)\Bigg|_{-4}^{0} = 12 \text{ u.a.}$$

Cálculo de A_2: No intervalo $[0, 2]$, $6 + x \geq x^3$. Então,

$$A_2 = \int_{0}^{2} [(6 + x) - x^3]\ dx = \left(6x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{2} = 10 \text{ u.a.}$$

Portanto, $A = A_1 + A_2 = 12 + 10 = 22$ u.a.

Cálculo de áreas

EXERCÍCIOS

encontrar a área da região limitada pelas curvas dadas.

1. $x = 1/2$, $x = \sqrt{y}$ e $y = -x + 2$
2. $y^2 = 2x$ e $x^2 = 2y$
3. $y = 5 - x^2$ e $y = x + 3$
4. $y = \frac{1}{6} x^2$ e $y = 6$
5. $y = 1 - x^2$ e $y = -3$
6. $x + y = 3$ e $y + x^2 = 3$
7. $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$ e $y = 3$
8. $y = x^3 - x$ e $y = 0$
9. $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$
10. $x = y^3$ e $x = y$