CENTRO PAULA SOUZA — GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO			Fatec Itaquera Prof. Miguel Reale **CURSO: Fabricação**		
Disciplina	**Cálculo 2**		**Professor(a)**	**Luis Carlos Barbosa Oliveira**	
Aluno(a)				**RM**	
Semestre	**2º**	**Turno**		**Data**	
Avaliação Oficial – P2 ♠				**Nota**	**GABARITO**

INSTRUMENTO DE AVALIAÇÃO: PROVA ESCRITA-SEM CONSULTA

DURAÇÃO 120 MINUTOS

INSTRUÇÕES PARA A PROVA : Respostas à tinta. Numerar as páginas. Responder em qualquer ordem desde que indicadas. Identificar em todas as folhas: nome, semestre, turno, curso e disciplina.

Objetivo: Avaliar conhecimentos sobre derivadas e integrais de funções de duas variáveis;
Conteúdos: Derivadas parciais de primeira e segunda ordem; derivada direcional; extremos e máximos e mínimos locais; Integrais duplas em regiões retangulares e não retangulares; cálculo volumes de sólidos.
Habilidades: Calcular derivadas e variações de funções de duas variáveis; calcular integrais duplas e volumes de sólidos limitados por regiões planas.

Questões:

Questão 1) (2,0 pontos) Determine as derivadas parciais de primeira ordem das funções:

a) $f(x,y) = (x^2-1)(y+2)$ b) $f(x,y) = \sqrt{5x^2+3y^2}$

a) $f(x,y) = (x^2-1)(y+2) = x^2y + 2x^2 - y - 2$

$$\boldsymbol{f_x = 2xy + 4x}$$

$$\boldsymbol{f_y = x^2 - 1}$$

b) $f(x,y) = \sqrt{5x^2+3y^2} = (5x^2+3y^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\boldsymbol{f_x = \frac{1}{2}(5x^2+3y^2)^{-\frac{1}{2}}(10x) = \frac{5x}{2\sqrt{5x^2+3y^2}}}$$

$$\boldsymbol{f_y = \frac{1}{2}(5x^2+3y^2)^{-\frac{1}{2}}(6y) = \frac{3y}{2\sqrt{5x^2+3y^2}}}$$

Questão 2) (1,5 pontos) Localize todos os pontos críticos e seus respectivos valores de máximo, mínimo ou de sela da função $f(x,y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

Ponto crítico?

Igualar a zero as derivadas parciais e resolver o sistema formado pelas equações:

$$f_x = y + 2$$

$$f_y = 2y + x + 3$$

$$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ 2y + x + 3 = 0 \end{cases} \rightarrow y = -2 \ \rightarrow 2(-2) + x + 3 = 0 \ \rightarrow x = 1$$

Ponto crítico: (1, -2)

$$f_{xx} = 0 \ ; \ f_{yy} = 2 \ ; \ f_{xy} = 1$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Como D < 0 então temos um **ponto de sela** em (1, -2)

Questão 3) (1,5 ponto) Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem da função $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

Derivadas parciais de primeira ordem:

$$f_x = e^{x^2-y^2}(2x) = 2x\, e^{x^2-y^2}$$

$$f_y = e^{x^2-y^2}(-2y) = -2y\, e^{x^2-y^2}$$

Derivadas parciais de segunda ordem:

$$f_{xx} = 2e^{x^2-y^2} + 2x\, e^{x^2-y^2}(2x) = 2e^{x^2-y^2} + 4x^2\, e^{x^2-y^2}$$

$$f_{yy} = -2e^{x^2-y^2} - 2y\, e^{x^2-y^2}(-2y) = -2\, e^{x^2-y^2} + 4y^2\, e^{x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = 0\, e^{x^2-y^2} + 2x\, e^{x^2-y^2}(-2y) = -4xy\, e^{x^2-y^2}$$

$$f_{yx} = 0\, e^{x^2-y^2} - 2y\, e^{x^2-y^2}(2x) = -4xy\, e^{x^2-y^2}$$

Questão 4) (2,0 ponto) Esboce o gráfico de cada região de integração e calcule as integrais:

a) $\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{1}(x+y+1)dxdy$ b) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{1}(2x+y)^4dxdy$

Resolução: a)

$$\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{1}(x+y+1)dxdy = \int_{-1}^{0}\left[\int_{-1}^{1}(x+y+1)dx\right]dy = \int_{-1}^{0}\left[\frac{x^2}{2}+yx+x\ \Big|_{-1}^{1}\right]dy =$$

$$= \int_{-1}^{0}\left[(\frac{1}{2}+y+1)-(\frac{1}{2}+y+1)\right]dy = \int_{-1}^{0}[2y+2]dy = \left[x^2+2y\ \Big|_{-1}^{0}\right] =$$

$$= [0-(-1^2+2(-1))] = 1$$

b)

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{1}(2x+y)^4dxdy = \int_{0}^{2}\left[\int_{0}^{1}(2x+y)^4dx\right]dy = \int_{0}^{2}\left[\int_{0}^{1}(u)^4\ \frac{du}{2}\right]dy =$$

$$u = 2x+y\ \ ;\ \ du = 2dx\ \ \rightarrow \frac{du}{2} = dx$$

$$= \int_{0}^{2}\left[\int_{0}^{1}(u)^4\ \frac{du}{2}\right]dy = \int_{0}^{2}\left[\frac{1}{2}(\frac{u^5}{5})\right]dy = \int_{0}^{2}\left[\frac{1}{10}((2x+y)^5)\ \Big|_{0}^{1}\right]dy$$

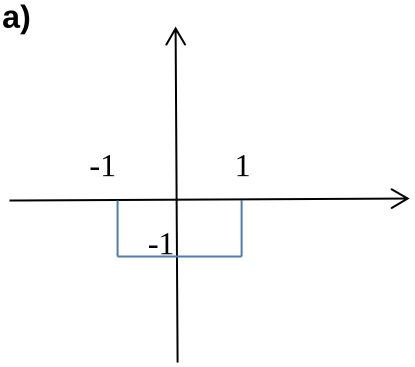
$$= \int_{0}^{2}\left[\frac{1}{10}((2+y)^5-(\frac{1}{10}((y)^5))\right]dy = \frac{1}{10}\int_{0}^{2}[((2+y)^5]dy - \frac{1}{10}\int_{0}^{2}[(y)^5]dy =$$

$$= \frac{1}{10}\int_{0}^{2}[(u)^5]du - \frac{1}{10}\int_{0}^{2}[(y)^5]dy = \frac{1}{10}\left[\frac{u^6}{6}\Big|_{0}^{2}\right] - \frac{1}{10}\left[\frac{y^6}{6}\Big|_{0}^{2}\right] = \frac{1}{10}\left[\frac{(2+y)^6}{6}\Big|_{0}^{2}\right] - \frac{1}{10}\left[\frac{y^6}{6}\Big|_{0}^{2}\right] =$$

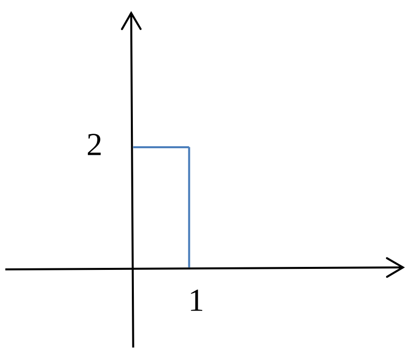
$$u = 2+y\ \ ;\ \ du = dy$$

$$= \frac{1}{60}[4^6-2^6] - \frac{1}{60}[2^6] = \frac{4032}{60} - \frac{64}{60} = \frac{3968}{60} = 66{,}13$$

a)



b)



Questão 5) (1,5 ponto) Calcule a integral dupla $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}dA$ na região

$R = \{(x,y)/\ 0 \leq x \leq 1\ ;\ -3 \leq y \leq 3\}$

RESOLUÇAO:

$$\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}dA = \int_0^1 \int_{-3}^3 \frac{xy^2}{x^2+1}dydx = \int_0^1 \left[\frac{x}{x^2+1}\int_{-3}^3 y^2 dy\right]dx = \int_0^1 \left[\frac{x}{x^2+1}\left(\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-3}^{3}\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x}{x^2+1}\left(\frac{3^3}{3} - \frac{-3^3}{3}\right)\right]dx = \int_0^1 \left[\frac{x}{x^2+1}\left(\frac{27}{3} + \frac{27}{3}\right)\right]dx = 18\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$u = x^2 + 1\ ;\ du = 2xdx\ \ \rightarrow \frac{du}{2} = xdx$$

$$= 18 \cdot \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u} = 9\ ln|x^2+1|\ \Big|_0^1 = 9\ \ln(2)$$

Questão 6) (1,5 ponto) Determine o volume do sólido delimitado pelo paraboloide elíptico definido por $z = 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ e acima da região $R = \{(x,y)/\ -1 \leq x \leq 1\ ;\ -2 \leq y \leq 2\}$

RESOLUÇAO:

$$V = \int_{-2}^2 \left[\int_{-1}^1 1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}dx\right]dy = \int_{-2}^2 \left[x - \frac{x^3}{12} - \frac{xy^2}{9}\Big|_{-1}^{1}\right]dy =$$

$$= \int_{-2}^2 \left[\left(1 - \frac{1^3}{12} - \frac{1y^2}{9}\right) - \left(-1 - \frac{-1^3}{12} - \frac{-1y^2}{9}\right)\right]dy = \int_{-2}^2 \left[\left(2 - \frac{1}{6} - \frac{2y^2}{9}\right)\right]dy =$$

$$= \int_{-2}^2 \left[\left(\frac{11}{6} - \frac{2y^2}{9}\right)\right]dy = \left[\left(\frac{11y}{6} - \frac{2y^3}{27}\right)\Big|_{-2}^{2}\right] = \left(\frac{22}{6} - \frac{16}{27}\right) - \left(\frac{-22}{6} - \frac{-16}{27}\right) =$$

$$= \frac{44}{6} - \frac{-32}{27} = \frac{22}{3} - \frac{-16}{27} = \frac{166}{27} = 6{,}14\ uV$$